

Министерство образования и науки Российской Федерации

---

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
Санкт-Петербургский государственный технологический институт  
(технический университет)

---

Кафедра общей физики

Осташев В.Б.

Часть V

**Электромагнетизм:**  
Магнитное поле. Электромагнитная индукция

*Конспект лекций*

Санкт-Петербург

2024

УДК \_\_\_\_\_

[Осташев В.Б.](#) «Часть V. Электромагнетизм: Магнитное поле. Электромагнитная индукция»: Конспект лекций. СПбГТИ(ТУ). СПб, 2024,— 85 с.



В лекциях рассмотрены ...,

...  
...  
...  
...  
...  
...  
...  
...

Лекции соответствуют следующим компетенциям подготовки специалистов всех направлений: ОК-1, ОК-3, ОК-6, ПК-3, ПК-4, ПК-10.

Рис. 64, табл. 2, библиогр. 6 назв.

Рецензент:

...

Утверждено на заседании методического Совета \_\_\_\_\_  
факультета СПГТИ(ТУ).

\_\_\_\_\_  
Протокол № \_\_, «\_\_».\_\_\_\_\_.20\_\_г.

# Часть V. Электромагнетизм: Магнитное поле. Электромагнитная индукция

## Содержание

Принятые основные обозначения .....	4
1. Магнитное поле в вакууме.....	6
1.1. Магнитное поле и его проявления .....	6
1.1.1. Взаимодействие проводников с токов.....	6
1.1.2. Магнитное поле и релятивистская механика.....	8
1.2. Магнитная индукция .....	11
1.2.1. Силовая характеристика магнитного поля.....	11
1.2.2. Закон Био – Савара – Лапласа .....	12
1.2.3. Магнитное поле прямого тока.....	15
1.2.4. Магнитное поле кругового тока.....	16
1.3. Взаимодействия в магнитном поле .....	20
1.3.1. Сила Ампера .....	20
1.3.2. Сила Лоренца .....	22
1.3.3. Движение частицы в магнитном поле .....	24
1.4. Магнитное поле движущейся частицы .....	28
1.5. Вихревой характер магнитного поля .....	31
1.5.1. Циркуляция и ротор вектора магнитной индукции .....	31
1.5.2. Теорема Гаусса вектора магнитной индукции .....	34
1.6. Магнитное поле соленоида и тороида .....	35
1.6.1. Поле соленоида.....	35
1.6.2. Поле тороида и другой вывод для поля соленоида.....	38
1.7. Магнитный момент .....	42
2. Магнитное поле в веществе.....	45
2.1. Молекулярные токи и намагниченность .....	45
2.2. Теорема о циркуляции намагниченности в веществе .....	45
2.3. Напряжённость магнитного поля и магнитная проницаемость среды.....	47
2.4. Магнитные свойства вещества – виды магнетиков.....	50
2.5. Ферромагнетики.....	51
2.6. Магнитное поле на границе двух магнетиков.....	56
3. Явления электромагнитной индукции.....	60
3.1. Работа в магнитном поле .....	60
3.2. Электромагнитная индукция .....	62
3.2.1. Закон электромагнитной индукции Фарадея.....	62
3.2.2. Самоиндукция. Индуктивность.....	63
3.2.3. Расчёт индуктивности соленоида .....	66
3.3. Энергия и плотность энергии магнитного поля .....	67
3.3.1. Энергия магнитного поля .....	67
3.3.2. Плотность энергии магнитного поля.....	69
3.4. Уравнения Максвелла .....	70
3.4.1. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла .....	70
3.4.2. Ток смещения. Третье уравнение Максвелла .....	72
3.4.3. Система уравнений Максвелла и её физический смысл.....	75
4. Релятивистское представление электромагнитного поля.....	78
4.1. Векторный потенциал магнитного поля.....	78
4.2. 4-вектор электрического потенциала.....	83
4.3. Тензор электромагнитного поля и уравнения Максвелла в тензорном виде.....	85
Литература .....	88

## Принятые основные обозначения

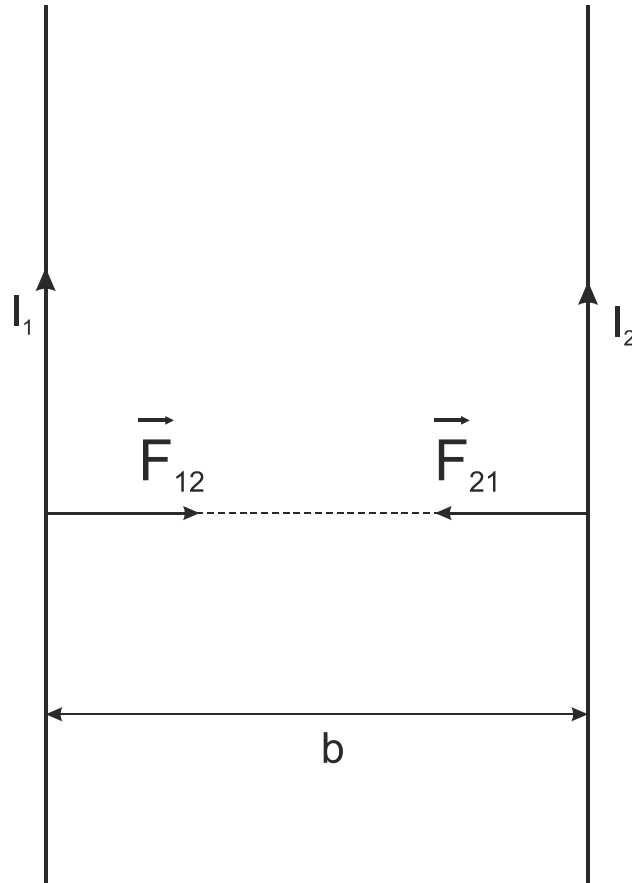
<u>Df.</u>	– определение,
<u>Th.</u>	– теорема,
$t$	– время, [с].
$\vec{r}$	– радиус-вектор, [м],
$r =  \vec{r} $	– абсолютное значение радиус-вектор, [м],
$\Delta\vec{r}$	– перемещение ( <i>вектор перемещения</i> ), [м],
$d\vec{r}$	– элементарное перемещение, [м],
$V$	– объём, [м <sup>3</sup> ],
$V_1$	– название фигуры, тела с объёмом $V$ ,
$\vec{S}$ , $S$	– вектор ориентированной поверхности, площадь поверхности [м <sup>2</sup> ],
$d\vec{S}$	– элементарный вектор ориентированной поверхности, [м <sup>2</sup> ],
$S_1$	– название поверхности с площадью $S$ ,
$l$	– длина кривой, [м],
$l_1$	– название кривой длиной $l$ ,
$d\vec{l}$	– элементарный вектор касательной к кривой, [м],
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	– вектор скорости, [м/с],
$v =  \vec{v} $	– абсолютное значение вектора скорости, [м/с],
$v_e = \frac{dS}{dt}$	– скалярная скорость, [м/с],
$\vec{a}$	– ускорение, [м/с <sup>2</sup> ],
$\vec{\tau}$	– единичный вектор касательной, [–],
$\vec{n}$	– единичный вектор нормали, [–],
$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$	– единичный вектор направления (параллелен вектору $\vec{r}_{12}$ ), [–],
$\vec{\omega}, \omega$	– угловая скорость и её абсолютная величина, [с <sup>-1</sup> ], [рад/с.],
$\vec{F}$	– сила, [Н],
$m$	– масса, [кг],
$\vec{p}$	– импульс, [кг·м/с],
$\vec{M}$	– момент силы, [Н·м],

$\bar{L}$	– момент импульса, [м/с],
$A$	– работа, [Дж],
$\bar{E}, E$	– вектор напряжённости электрического поля и его абсолютная величина (в зависимости от контекста), [В/м],
$\bar{D}, D$	– вектор электрического смещения и его абсолютное значение (вектор индукции электрического поля – <i>устар.</i> ) [Кл/м <sup>2</sup> ],
$\bar{B}, B$	– вектор магнитной индукции и его абсолютное значение [Тл],
$\bar{H}, H$	– вектор напряжённости магнитного поля и его абсолютная величина [А/м],
$T$	– кинетическая энергия, [Дж],
$W$	– потенциальная энергия ( <i>потенциальная энергия поля, заряженной частицы в поле</i> ), [Дж],
$U$	– напряжение на участке цепи (в зависимости от контекста), [В],
$\varphi$	– потенциал, [В],
$q, Q$	– заряд ( <i>физическая величина заряд</i> ) [Кл]
$e$	– элементарный заряд, $e = 1.60217653 \cdot 10^{-19}$ Кл,
$\mathcal{E}$	– ЭДС, электродвижущая сила, [В],
$R$	– сопротивление (в зависимости от контекста) [Ом],
$I$	– сила тока [А],
$Q, dQ$	– количество теплоты и элементарное количество теплоты (в зависимости от контекста),
$\Phi(x, y, z),$	
$\Phi(x, y, z, t)$	– скалярное поле (скалярная функция координат либо скалярная функция координат и времени),
$\Phi_{\bar{A}}$	– поток векторного поля $\bar{A}$
$\epsilon$	– диэлектрическая проницаемость среды [–]
$\epsilon_0$	– электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость вакуума – <i>устар.</i> ) [Ф/м]
$\mu$	– магнитная проницаемость среды [–]
$\mu_0$	– магнитная постоянная (магнитная проницаемость вакуума – <i>устар.</i> ) [Гн/м]
$L$	– индуктивность [Гн],
$d\dots$	– значок элементарной величины, элементарного приращения или дифференциала ( <i>с математической точки зрения</i> ).
$\langle \dots \rangle$	– средняя величина.

# 1. Магнитное поле в вакууме

## 1.1. Магнитное поле и его проявления

### 1.1.1. Взаимодействие проводников с током



**Рисунок 1.1**

Силы, действующие на два проводника с током

Закон Ампера в данном контексте не путать с силой Ампера.

$$f = \frac{F}{l} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1I_2}{b} \quad (1.1)$$

$\mu$  – магнитная проницаемость среды (смысл этой величины станет понятен в следующем разделе, пока же будем считать, что для вакуума это константа, равная  $1$  –  $\mu = 1$ )

$\mu_0$  – магнитная постоянная

$I_1, I_2$  – токи

$b$  – расстояние между проводниками

Два параллельных бесконечно длинных проводника взаимодействуют с силами, приходящимися на единицу длины проводника, пропорционально

произведению сил токов в обоих проводниках и обратно пропорционально расстоянию между ними.

Если токи текут в одном направлении, проводники притягиваются, если в разные стороны – отталкиваются.

**Замечание.** Константы в данном уравнении выбраны из расчета системы СИ и удобства дальнейшего построения теории.

Заметим также, что по второму (в узком смысле) определению электрический ток есть упорядоченное движение заряженных частиц. Следовательно, магнитное поле будет создаваться движущимися заряженными частицами и действовать на движущиеся заряженные частицы.

*Таким образом:*

**Магнитное поле** создаётся электрическими токами или движущимися зарядами (*заряженными частицами*) и действует на электрические токи или движущиеся заряды.

**Замечание.** С одной стороны, взаимодействие электрических токов посредством магнитного поля, вроде бы, следует из утверждения о взаимодействии движущихся зарядов. Но вспомним первое, основное определение электрического тока – «если через некоторую поверхность осуществляется перенос заряда, то говорят, что через эту поверхность протекает электрический ток». Мы будем считать, что если кто-нибудь когда-нибудь откроет явление переноса заряда без переноса вещества (ну, ведь существует явление переноса энергии без переноса вещества – излучение, здесь нет никаких противоречий с существующими теориями), то это тоже будет электрический ток, и он тоже будет создавать магнитное поле.

С другой стороны, существует вариант данного утверждения, когда говорится, что магнитное поле создаётся движущимися зарядами и собственными магнитными моментами вещества и действует на движущиеся заряды и собственные магнитные моменты вещества. Чуть ниже мы будем разбирать магнитные свойства вещества и скажем, что они определяются так называемыми *молекулярными токами* – внутрикристаллическим движением заряженных частиц, их движением на уровне атомов и молекул. Так что можно считать, что это утверждение вполне укладывается в нашу концепцию. Пока что мы будем считать, что собственные магнитные моменты есть не что иное, как результат протекания круговых токов в самом веществе.

Единственное, что не укладывается в нашу модель, это *ферромагнетики*. Их магнитное поле создаётся спиновыми магнитными моментами – *спином электрона*. А спин есть некое внутреннее квантовое свойство частицы (*спин – свойство наличия у частицы собственного момента импульса и собственного магнитного момента*). Однако, природа спина до конца не изучена, и мы вынесем всё, что касается него «за скобки». По крайней мере, оставим все рассуждения до момента рассмотрения квантовой механики. Единственное отметим, что при рассмотрении уравнения Дирака для электрона мы утверждаема, что *спин* необходим, как некоторая собственная внутренняя степень свободы частицы. Да и забегая вперёд, и учитывая материал следующего параграфа, скажем, что Эйнштейн утверждал, что магнитное поле есть не что иное, как преобразованное к подвижным координатам электрическое поле. (*Обратите внимание! В рамках утверждений, которые мы сформулируем в следующем параграфе, нам, прежде всего, важно наличие преобразования Лоренца – переход к подвижной системе отсчёта, а не факт движения частицы вещества. Это относится и к электрическому току.*) Таким образом, на данный момент будем и его считать неким неизученным нами движением заряда внутри частицы – то есть электрическим током.

Ниже мы скажем, что магнитное поле создаётся переменным электрическим полем. Но это уже есть свойство электромагнитной волны. И мы также вынесем его «за скобки».

Основной силовой характеристикой магнитного поля является **вектор магнитной индукции**  $\vec{B}$  (аналогично вектору напряженности  $\vec{E}$  для электрического поля). Вспомогательной – **вектор напряжённости магнитного поля**  $\vec{H}$  (аналогично вектору электрического смещения  $\vec{D}$ , устаревшее название – вектор электрической индукции). Пока что под вектором магнитной индукции мы будем понимать максимальную силу (максимальную при всех возможных направлениях его движения), действующую на единичный положительный заряд, движущейся с единичной скоростью в магнитном поле. Под напряжённостью магнитного поля будем понимать магнитную индукцию, делённую на магнитную постоянную ( $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м). Ниже, мы введём оба эти понятия несколько иначе, сохранив общий смысл.

### 1.1.2. Магнитное поле и релятивистская механика

Магнетизм есть проявление релятивистской механики.

Рассмотрим сначала данное утверждение на простом полусказочном примере ☺. Вы едите в поезде, который движется вполне равномерно и прямолинейно, проезжая в этот момент мимо станции. Обе системы координат, связанные с пиромом станции и с вашим вагоном, являются инерциальными и вполне равнозначными. Вы сидите на нижней полке, а напротив Вас столь же неподвижно сидит жирный электрический заряд. На его пузе красуется большой красный знак «плюс». Вы кидаете мимолётный взгляд на этот заряд – для Вас у него существует вполне конкретное электрическое поле. Его можно измерить прибором, оно действует на окружающие предметы, если те имеют нескомпенсированный заряд. И, конечно же, не действует на электрический ток – суммарный заряд в проводнике равен нулю.

На платформу помахать вам платочком вышла подруга. Она видит в окне вагона Вашего попутчика – электрический заряд. Но, вот, для неё этот заряд не является неподвижным – он движется вместе с поездом и у него имеется вполне конкретное магнитное поле. Его тоже можно измерить соответствующим прибором. Конечно же, если внимательно рассмотреть все законы, показания всех прибором сойдутся с предсказанными значениями и противоречий в итоге не возникнет. Но суть проблемы остаётся. Магнитное поле, полностью отсутствует в неподвижной системе координат и появляется в другой, совершенно эквивалентной ей инерциальной системе, только движущейся относительно первой.

Этот факт более точно и более научно можно сформулировать, как то, что [уравнения Максвелла](#) (мы будем проходить их чуть позже), являющиеся квинтэссенцией классического электромагнетизма, неформинвариантны относительно преобразования координат от одной инерциальной системы к другой – попросту они меняют свой вид.



В первом приближении, мы можем заметить это, обратив внимание на следующее обстоятельство: в уравнениях (3.23) и (3.25) присутствуют первые производные характеристик электрического и магнитного полей по времени:  $\frac{\partial E}{\partial t}$  и  $\frac{\partial B}{\partial t}$ . Переходя от одной инерциальной системы отсчёта к другой (*опуская математическую строгость, касательно частных производных и векторов...*), их можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_v = \frac{dA}{dx} v.$$

Здесь под  $A$  подразумеваются величины  $E$  или  $B$ . Следовательно, эти уравнения будут изменяться при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой. Напомним, что во II законе Ньютона ускорение – есть вторая производная по времени и оно одинаково для всех систем отсчёта, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно.

*(Далее мелкий шрифт для любознательных)*

Эйнштейн рассматривает следующее выражение для уравнений Максвелла (для вакуума):

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}.$$

Здесь уравнения записаны в системе СГС, учтена связь скорости света в вакууме с электрической и магнитной постоянными (об этом мы поговорим позже в параграфе «Электромагнитные волны» раздела «Колебания и волны. Общая теория»)

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

и учтено выражение оператора rot в координатной форме:

$$\text{rot } \bar{F} \equiv \nabla \times \bar{F} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \times \bar{i} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} \times \bar{j} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} \times \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =,$$

$$= \begin{cases} (\text{rot } \bar{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ (\text{rot } \bar{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ (\text{rot } \bar{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{cases}$$

Переходя к подвижной системе координат и применяя предложенное им в той же статье преобразование (*позднее преобразование Лоренца*):

$$\begin{cases} \tau = \beta \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ \xi = \beta (x - vt) \\ \eta = y \\ \zeta = z \end{cases},$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2}},$$

Эйнштейн показывает, что уравнения приобретают вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial E'_\xi}{\partial \tau} = \frac{\partial H'_\zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial H'_\eta}{\partial \zeta} & \frac{1}{c} \frac{\partial H'_\xi}{\partial \tau} = \frac{\partial E'_\eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \eta} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E'_\eta}{\partial \tau} = \frac{\partial H'_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial H'_\zeta}{\partial \xi} & \frac{1}{c} \frac{\partial H'_\eta}{\partial \tau} = \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \xi} - \frac{\partial E'_\xi}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E'_\zeta}{\partial \tau} = \frac{\partial H'_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial H'_\xi}{\partial \eta} & \frac{1}{c} \frac{\partial H'_\zeta}{\partial \tau} = \frac{\partial E'_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial E'_\eta}{\partial \xi} \end{cases}.$$

(Общие выводы для всех)

В результате своих рассуждений Эйнштейн даёт новую формулировку утверждения, звучащего в рамках теории Максвелла-Герца<sup>1</sup>:

1. Если в электромагнитном поле движется единичный точечный заряд, то на него, кроме электрического поля действует ещё «электромагнитная сила», которая при условии пренебрежения

членами, пропорциональными второй и более высокими степенями  $\frac{v}{c}$ ,

равна делённому на скорость света векторному произведению скорости движения единичного заряда на напряжённость магнитного поля (старая формулировка.)

2. Если единичный точечный заряд движется в электромагнитном поле, то действующая на него сила равна напряжённости электрического поля в месте нахождения этого заряда, получающейся в результате преобразования поля к координатной системе, покоящейся относительно этого заряда. (Новая формулировка.)

<sup>1</sup> К электродинамике движущихся тел.\* Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. I Работы по теории относительности. 1905-1920. М: «Наука», 1965г., с.24.,

\*Zur Electrodynamik der bewegter Körper. Ann. Phys., 1905, 17, 891-921.

## 1.2. Магнитная индукция

### 1.2.1. Силовая характеристика магнитного поля

Введем силовую характеристику магнитного поля. Рассмотрим закон Ампера:

$$f = \frac{F}{l} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}$$

Ток  $I_1$  создает магнитное поле

Ток  $I_2$  внесен в поле.

Если разделить  $f$  на силу тока  $I_2$ , то данная характеристика не будет зависеть от параметров проводника, внесенного в поле и т.о. будет характеристикой самого магнитного поля.

$$B = \frac{f}{I_2} = \frac{F}{II_2} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{b} .$$

Назовём характеристику  $B$  магнитной индукцией. В системе СИ эта величина измеряется в *теслах*  $[Tл] = \frac{[H]}{[A][м]} = \frac{[кг]}{[A][с]^2}$ . Международное обозначение  $[T]$ .

**Замечание!!!:** не является определением.

Тогда сила, действующая на проводник, внесенный в поле (*параллельное проводнику, создаваемое поле*) может быть вычислена по формуле:

$$f = \frac{F}{\ell} = BI .$$

или

$$F = BI\ell .$$

**В итоге:** магнитная индукция  $B$  есть максимальная сила, действующая со стороны магнитного поля на прямолинейный проводник единичной длины, по которому течет электрический ток единичной силы тока:

$$B = \frac{F_{Max}}{\ell I} . \quad (1.2)$$

**Вариант (учебник Савельева):**

Магнитная индукция  $B$  есть максимальная сила, действующая со стороны магнитного поля на частицу с единичным зарядом, движущуюся с единичной скоростью:

$$\vec{F}_{Лоренца} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow B = \frac{F_{Max}}{qv} . \quad (1.3)$$

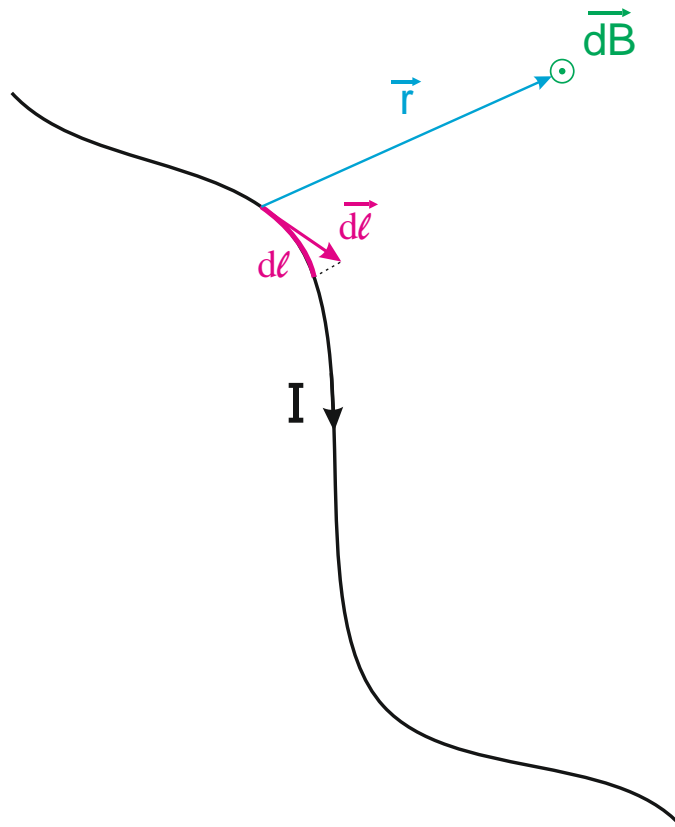
С силой Лоренца, действующей со стороны магнитного поля на движущуюся частицу, мы познакомимся чуть позже.

**Замечание.** Второй вариант трактовки физической величины «*Магнитная индукция*»  $B$  более близок идее и логике построения теории (при построении теории «с нуля» мы вводим понятие силы Лоренца, как силы, действующей на заряженную частицу, и из неё уже строим силу Ампера, действующую на проводник с током). Однако, первый подход ближе к историческому ходу развития физики, так как, магнитные взаимодействия были открыты, как взаимодействия проводников с током и именно так была введена силовая характеристика этих взаимодействий. Понятие силы Лоренца, как силы действующей на заряженную частицу, появилось уже позже.

### **1.2.2. Закон Био - Савара - Лапласа**

Рассмотрим Рисунок 1.2. Элементарная магнитная индукция, создаваемая элементом проводника  $dl$ , который задаётся элементарным касательным вектором  $d\vec{l}$  в точке, на которую указывает вектор  $\vec{r}$  пропорциональна силе тока  $I$ , протекающего в проводнике, векторному произведению элементарного касательного вектора и радиус-вектора и обратно пропорциональна кубу длины радиус-вектора.

При этом по абсолютной величине эта элементарная индукция прямо пропорциональна силе тока, элементу длины и обратно пропорциональна квадрату расстояния. В этом состоит *суть закона Био-Савара-Лапласа*.



**Рисунок 1.2**  
Закон Био-Савара-Лапласа

$$d\bar{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\bar{l}, \bar{r}]}{r^3}$$

либо

$$d\bar{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I d\bar{l} \times \bar{r}}{r^3} .$$
(1.4)

Это и есть **определение** вектора элементарной магнитной индукции  $d\bar{B}$ .

Здесь:

$d\bar{B}$  – элементарный вектор магнитной индукции, создаваемый элементарным отрезком проводника длиной  $d\bar{l}$ .

$d\bar{l}$  – вектор, направленный по касательной к проводнику, равный по абсолютной величине длине отрезка  $dl$  и направлен в сторону направления тока.

$\bar{r}$  – вектор, направленный от рассматриваемого отрезка к точке, в которой рассматривается поле.

$r$  – длина вектора  $\bar{r}$  (расстояние от элемента проводника до точки).

$[\vec{dl}, \vec{r}]$  – векторное произведение,  $[\vec{dl}, \vec{r}] \equiv \vec{dl} \times \vec{r}$ .

Причём

$$|\vec{dl} \times \vec{r}| = dl \cdot r \cdot \sin \alpha$$

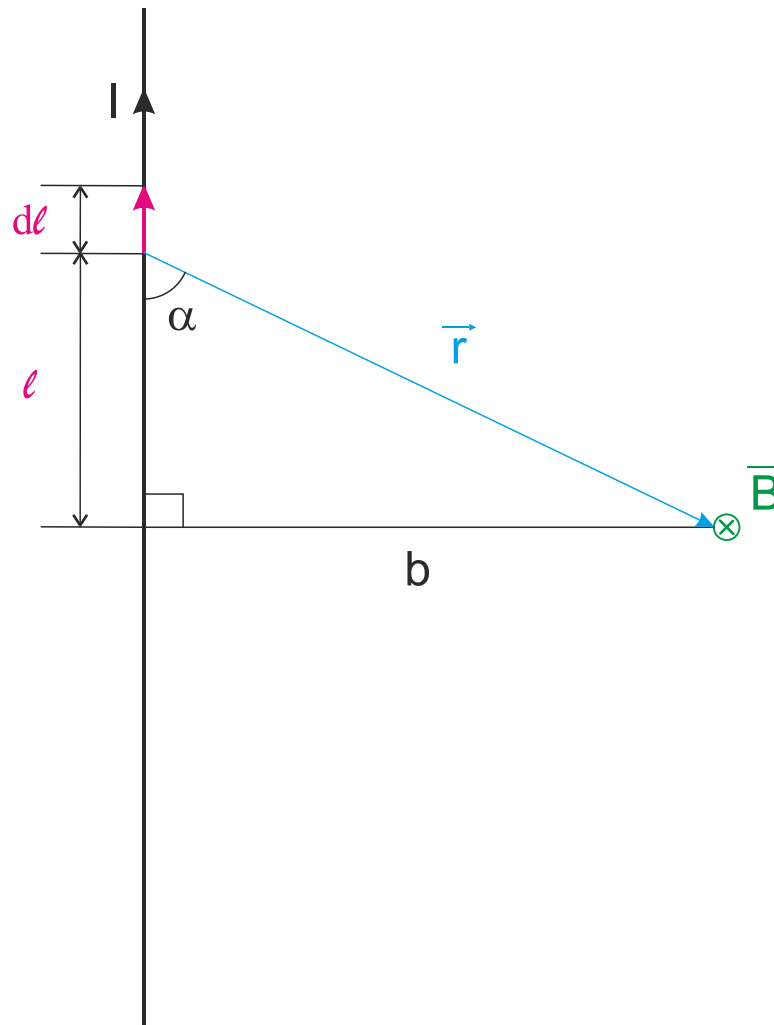
Тогда по абсолютной величине элементарная магнитная индукция будет равна:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \cancel{r} \cdot \sin \alpha}{r^{\cancel{3}2}} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \sin \alpha}{r^2},$$
$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \sin \alpha}{r^2}. \quad (1.5)$$

Значение *магнитной индукции* может быть получено как интеграл от  $d\vec{B}$  по всей длине проводника:

$$\vec{B} = \int_{l_1} d\vec{B} = \int_{l_1} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I[\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (1.6)$$

**1.2.3. Магнитное поле прямого тока**  
(бесконечно длинного прямолинейного проводника)



**Рисунок 1.3**

Магнитное поле бесконечного прямолинейного проводника

Как было показано выше, по абсолютной величине элементарная магнитная индукция будет равна:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \sin \alpha}{r^2}.$$

Учтём следующие соотношения:

$$l = r \cos \alpha$$

$$b = r \sin \alpha \Rightarrow r = \frac{b}{\sin \alpha}$$

$$l = r \cos \alpha = \frac{b}{\sin \alpha} \cos \alpha = b \operatorname{ctg} \alpha$$

$$dl = d(b \cdot \operatorname{ctg} \alpha) = b \cdot d(\operatorname{ctg} \alpha) = -\frac{b}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

Подставим всё это в исходное выражение:

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} \underbrace{\frac{-b}{\sin^2 \alpha}}_{dl} d\alpha = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{\left(\frac{b}{\sin \alpha}\right)^2} \frac{-b}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \\ &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha \cancel{\sin^2 \alpha}}{b^2} \frac{-b}{\cancel{\sin^2 \alpha}} d\alpha = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{b} d\alpha. \end{aligned}$$

Для получения окончательного значения, проинтегрируем:

$$\begin{aligned} B &= \int_{L_1} dB = \int_{\pi}^0 -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{b} d\alpha = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \int_{\pi}^0 \sin \alpha d\alpha = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (-\cos \alpha) \Big|_{\pi}^0 = \\ &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\cos \alpha) \Big|_{\pi}^0 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} 2. \end{aligned}$$

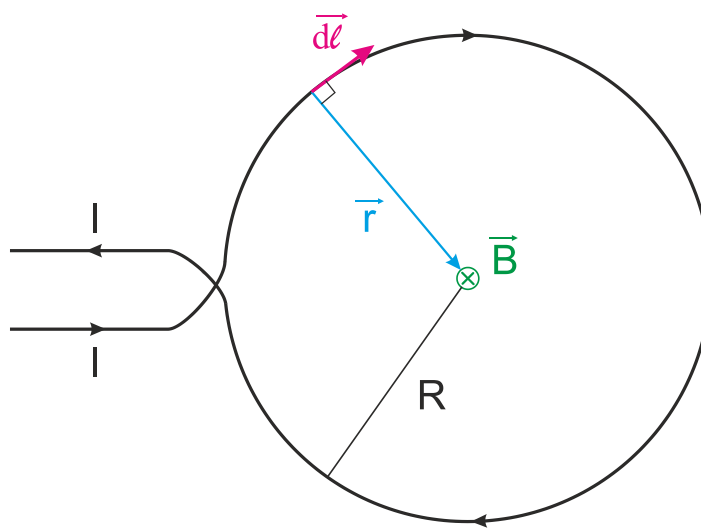
Получили выражение для магнитной индукции *бесконечно прямолинейного проводника*:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (1.7)$$

– магнитная индукция бесконечно длинного прямолинейного проводника.

#### 1.2.4. Магнитное поле кругового тока

Для магнитного поля кругового тока в центре витка имеем следующие утверждения:



**Рисунок 1.4**

Магнитное поле кругового тока в центре вика



угол между радиус-вектором и вектором элемента длины здесь прямой:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = 1,$$

длина радиус вектора равна радиусу окружности:

$$r = R.$$

Тогда по выражение закона Био-Савара-Лапласа примет вид:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha dl}{r^2} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl.$$

Поскольку длина дуги равна

$$l = R\beta,$$

где  $\beta$  – угол, на который опирается дуга,  
для элемента длины дуги получим:

$$dl = R d\beta.$$

Формула примет вид:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} R d\beta = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} d\beta.$$

Теперь проинтегрируем по полному углу ( $\beta = 0 \div 2\pi$ ):

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} d\beta = \frac{\mu\mu_0 I 2\pi}{4\pi R} = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}.$$

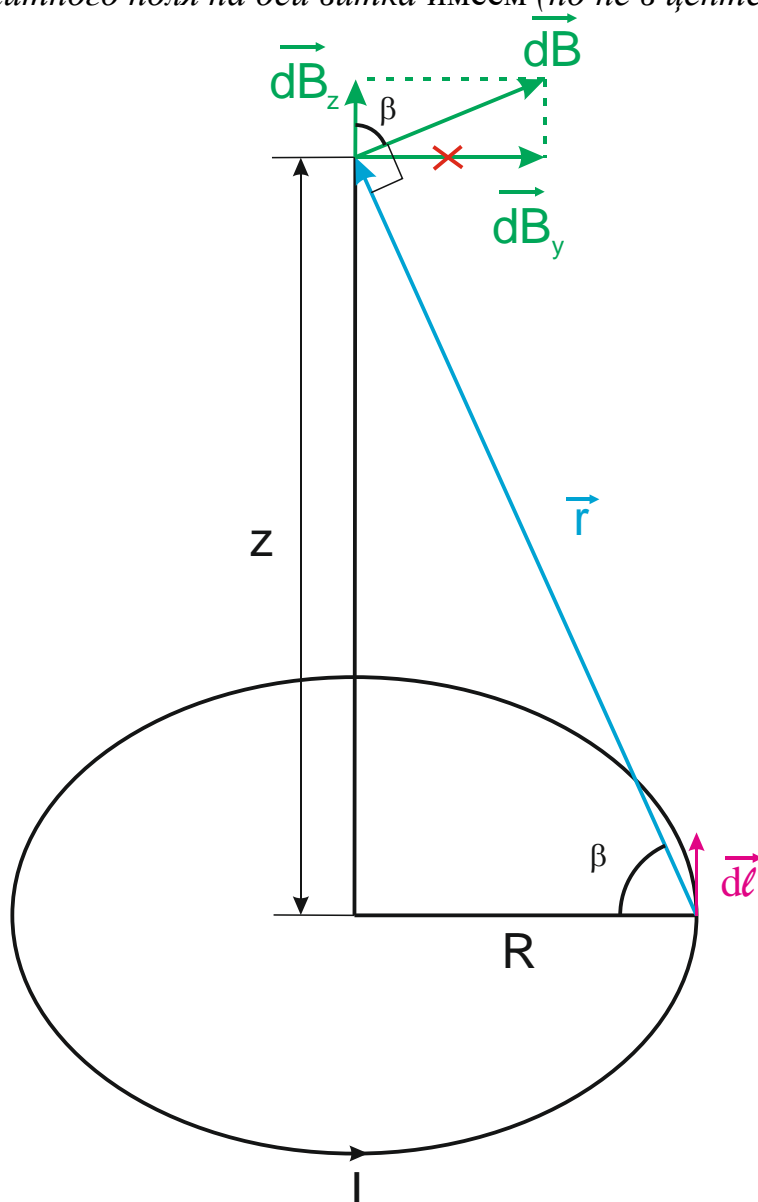
В итоге, магнитная индукция в центре кольца (кругового тока в центре витка) равна:

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}. \quad (1.8)$$

Вообще-то можно проще – не переходя к интегрированию по углу, интегрируем  $d\ell$  по всей длине окружности:

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl \Rightarrow B = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl = \\ &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \cancel{2\pi} \cancel{R} = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}. \end{aligned}$$

Для магнитного поля на оси витка имеем (но не в центре):



**Рисунок 1.5**

Магнитное поле на оси витка

Во-первых сразу определимся – проекция  $dB_y$  взаимно уничтожится с такой же проекцией от элемента  $d\ell$  с другой стороны окружности. Мы могли бы честно проинтегрировать выражение и по проекции  $Y$ , но это не имеет особого смысла. И так, будем суммировать (интегрировать) только проекцию  $Z$ . И так, Эта проекция будет равна:

$$dB_z = dB \cos \beta = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \beta.$$

Не будем усложнять себе жизнь и проинтегрируем элемент длины  $d\ell$  по всей длине окружности, не переходя к углу у основания:

$$L = 2\pi R,$$

$$\begin{aligned}
 B &= \int_0^{L=2\pi R} dB_z = \int_0^{L=2\pi R} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \beta}{r^2} dl = \\
 &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \beta}{r^2} \int_0^{L=2\pi R} dl = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \beta}{r^2} 2\pi R =
 \end{aligned}$$

Далее учтём, что косинус угла  $\beta$  есть отношение радиуса окружности к длине радиус-вектора (см. Рисунок 1.5):

$$\begin{aligned}
 \cos \beta &= \frac{R}{r}, \\
 &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi R \cos \beta}{r^2} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi R R}{r^2 r} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi R^2}{r^3} =
 \end{aligned}$$

Окончательно, выражая длину радиус-вектора через высоту и радиус окружности, получаем:

$$\begin{aligned}
 r^2 &= z^2 + R^2 \Rightarrow r = \sqrt{z^2 + R^2}, \\
 r^3 &= (z^2 + R^2)^{3/2}. \\
 &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

Выражение для индукции магнитного поля на оси кругового тока примет вид:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (1.9)$$

В случае если  $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ , выражение переходит в формулу для магнитного поля кругового тока в центре витка:

$$\begin{aligned}
 z = 0 \Rightarrow B &= \frac{\mu\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu\mu_0 I R^2}{2(0^2 + R^2)^{3/2}} = \\
 &= \frac{\mu\mu_0 I R^2}{2R^{\cancel{2} \cdot \frac{3}{2}}} = \frac{\mu\mu_0 I \cancel{R^{\cancel{2}}}^{\cancel{2}}}{2R^{\cancel{2} \cdot \frac{3}{2}}} = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}.
 \end{aligned}$$

Мы получили тоже, что и в формуле (1.8) в начале раздела.

## 1.3. Взаимодействия в магнитном поле

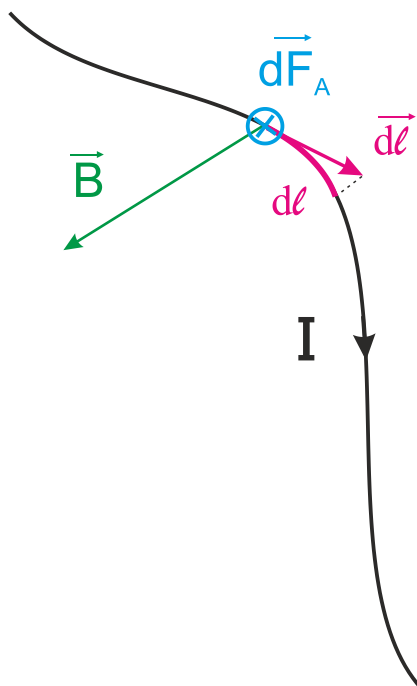
### 1.3.1. Сила Ампера

**Сила Ампера** – это сила, действующая на проводник с током в магнитном поле:

$$d\vec{F}_A = I \left[ d\vec{l}, \vec{B} \right], \quad (1.10)$$

*иначе*

$$d\vec{F}_A = I d\vec{l} \times \vec{B}.$$



**Рисунок 1.6**

Сила Ампера, действующая на элемент длины проводника

**Закон.** Элементарная *сила Ампера*, действующая на элемент проводника длиной  $d\ell$  и задаваемого элементарным вектором  $d\vec{l}$ , пропорциональна силе тока, протекающего в проводнике и векторному произведению элементарного касательного вектора на вектор магнитной индукции в этой точке.

Это закон, открытый экспериментально. То есть, он ни откуда не выводится, а следует из наблюдений над окружающей средой. Уже из него методом математического вывода может быть получена сила Лоренца – сила, действующая на частицу в магнитном поле. Что мы и сделаем ниже. Однако в теоретических курсах принято постулировать силу Лоренца, как более фундаментальную величину и из неё выводить силу Ампера. Но мы пойдём по историческому пути.

Ещё одно представление силы Ампера – через плотность тока и объём проводника, на который она действует. Вспомним определение для плотности тока и выразим через неё силу тока:

$$j = \frac{I}{S} \Rightarrow I = jS .$$

Подставим в выражение для силы Ампера и внесем скалярную величину  $S$  под векторное произведение (*используя его свойство дистрибутивности относительно умножения на числовой коэффициент*), как коэффициент перед первым сомножителем:

$$dF_A = I [d\vec{l}, \vec{B}] = jS [d\vec{l}, \vec{B}] = [jS \cdot d\vec{l}, \vec{B}] =$$

*иначе*

$$d\vec{F}_A = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B} = jS \cdot d\vec{l} \times \vec{B} = (jS \cdot d\vec{l}) \times \vec{B} =$$

А теперь поменяем местами значок вектора между элементарным касательным к кривой вектором  $d\vec{l}$  и вектором плотности тока  $\vec{j}$ , учитывая тот факт, что они всегда параллельны и значение не изменится от того, какую из этих величин мы будем считать векторной, а какую скалярной:

$$\vec{j} \uparrow\uparrow d\vec{l} (\uparrow\uparrow I) .$$

$$= [jS \cdot d\vec{l}, \vec{B}] = [S \cdot d\vec{l} \cdot \vec{j}, \vec{B}] = [dV \cdot \vec{j}, \vec{B}] = dV [\vec{j}, \vec{B}]$$

*иначе*

$$= (jS \cdot d\vec{l}) \times \vec{B} = (Sdl \cdot \vec{j}) \times \vec{B} = (dV \cdot \vec{j}) \times \vec{B} = dV \cdot \vec{j} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} dV$$

**Тогда** сила Ампера, действующая на элементарный объём проводника, в выражении через плотность тока будет равна:

$$d\vec{F}_A = [\vec{j}, \vec{B}] dV ,$$

*иначе*

$$d\vec{F}_A = \vec{j} \times \vec{B} dV .$$

(1.11)

Рассмотрим силу Ампера, действующую на бесконечно длинный прямолинейный проводник в магнитном поле. Пусть поле создается бесконечно длинным (или достаточно длинным) проводником, по которому течет ток  $I_1$  и действует на проводник бесконечно длинный (или достаточно длинный) параллельный данному, находящийся на расстоянии  $b$  от него, по которому течет ток  $I_2$ .

Во всех точках, где расположен проводник с током  $I_2$  проводник с током  $I_1$  будет создавать одинаковое магнитное поле с индукцией

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{b} .$$

Тогда сила Ампера может быть рассчитана:

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l}, \vec{B}] \text{ или } d\vec{F}_A = I d\vec{l} \times \vec{B}.$$

По абсолютной величине элементарная сила будет равна:

$$dF_A = IBdl \sin \alpha,$$

где угол  $\alpha$  равен:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Проинтегрировав по длине проводника, который задан кривой  $L_2$  и которая (длина) равна  $l_2$ , получаем:

$$F_A = \int_{L_2} I_2 B dl = I_2 B \ell_2.$$

Теперь подставим значение для магнитной индукции, создаваемой бесконечно длинным проводником:

$$F_A = I_2 B \ell_2 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{b} I_2 \ell_2.$$

Получили:

$$F_A = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b} \ell_2.$$

Мы получили то выражение, которое было рассмотрено вначале раздела «Магнетизм», то есть силу взаимодействия двух бесконечно длинных проводников, экспериментально открытую Ампером:

$$f = \frac{F_A}{\ell} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}.$$

Это значит, что построенная нами теория верна и её предсказания совпадают с реально наблюдаемыми фактами. Напомним, что вектор магнитно индукции, как аксиальный (тесть псевдо-) вектор не может реально наблюдаться в эксперименте, а является промежуточной, воображаемой величиной.

### 1.3.2. Сила Лоренца

**Сила Лоренца** – это сила, действующая со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу.

$$\vec{F}_L = q [\vec{v}, \vec{B}], \tag{1.12}$$

или

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}.$$

Для электрического тока в металле

$$q = -e.$$

Тогда, действующая на электрон:

$$\bar{F}_L = e \bar{B} \times \bar{v} \quad (1.13)$$

*Доказательство.* Как было показано выше, элементарная сила Ампера (в элементарном объеме):

$$dF_A = [\bar{j} \times \bar{B}] dV$$

$$\bar{j} = qn\bar{v}$$

$$j = \frac{I}{S}$$

$$I = \frac{Q}{t}$$

за время  $t$  протечет  $Q=Nq$ ,  $q$  – заряд частицы,  $N$  – число частиц

$$Q = nVq,$$

здесь  $V$  – объем

$$V = S\ell t$$

$$j = \frac{Q}{tS} = \frac{nS\ell t q}{St} = n\ell q$$

$$N = nV$$

$n$  – концентрация

$V$  – объем

$$\bar{j} \uparrow \uparrow \bar{v}_t,$$

$$\bar{j} = qn\bar{v},$$

$$\ell = \ell t,$$

$$d\bar{F}_L = [\bar{j}, \bar{B}] dV = [qn \bar{v}, \bar{B}] dV = qn [\bar{v}, \bar{B}] dV.$$

В других терминах:

$$d\bar{F}_L = \bar{j} \times \bar{B} dV = (qn \bar{v}) \times \bar{B} dV = qn (\bar{v} \times \bar{B}) dV.$$

Проинтегрируем это выражение по объему  $V$ , содержащему одну частицу.

$$F_L = \int_{v=1/n} dF_L = \int_{v=1/n} qn [\bar{v}, \bar{B}] dV = qn [\bar{v}, \bar{B}] V_{1r} = qn V_{1r} [\bar{v}, \bar{B}] = q [\bar{v}, \bar{B}]$$

$$N = Vn \Rightarrow V = \frac{N}{n}; \quad N = 1 \Rightarrow V_{N=1} = \frac{1}{n}$$

**Обобщенная сила Лоренца** – это сила, действующая на заряженную частицу со стороны электромагнитного поля.

$$\vec{F}_{OL} = q \left[ \vec{v}, \vec{B} \right] + q\vec{E}, \quad (1.14)$$

или

$$\vec{F}_{OL} = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}$$

$q\vec{v} \times \vec{B}$  – магнитная составляющая

$q\vec{E}$  – электрическая составляющая

**Работа силы Лоренца.** Запишем значение для силы Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

и подставим её выражение в определение элементарной работы:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt.$$

При этом мы выразили радиус-вектор через скорость:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt.$$

Очевидно, что результат векторного произведения скорости на магнитную индукцию будет перпендикулярен вектору скорости и их скалярное произведение обязательно будет равно  $0$ :

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \perp \vec{v} \Rightarrow (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0.$$

Это же можно доказать и через смешанное произведение или через признак коллинеарности векторов.

В итоге получили:

$$dA = 0 \Rightarrow A_n = 0$$

*Работа силы Лоренца всегда равна нулю.*

**Вывод:** сила Лоренца является гироскопической силой и вызывает только центростремительное ускорение.

### 1.3.3. Движение частицы в магнитном поле

Поскольку сила Лоренца может создавать только центростремительное ускорение, движение под действием этой силы будет либо движение по окружности, либо движение по спирали. Рассмотрим абсолютное выражение для силы Лоренца:

$$F_L = qvB \sin(\angle \vec{v}, \vec{B}).$$



Обозначим, как

$$v_{\perp} = v \sin(\angle \bar{v}, \bar{B})$$

проекцию скорости частицы на направление, перпендикулярное линиям магнитной индукции. Тогда силу Лоренца можно записать, как:

$$F_L = qv_{\perp} B.$$

По второму закону Ньютона сила, действующая на частицу равна произведению её массы на приобретаемое в результате этого ускорение:

$$F = ma,$$

где сила – есть сила Лоренца, а ускорение – центростремительное ускорение:

$$F_L = ma_{\text{ц}}.$$

Подставим в выражение сначала значение силы Лоренца, а затем центростремительного ускорения:

$$qv_{\perp} B = ma_{\text{ц}},$$
$$qv_{\perp} B = \frac{mv_{\perp}^2}{R}.$$

Преобразуем выражение

$$qB = \frac{mv_{\perp}}{R},$$

и получим значение для радиуса окружности (или спирали), по которой будет двигаться частица в магнитном поле:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB}, \quad (1.15)$$

или

$$R = \frac{mv \sin(\angle \bar{v}, \bar{B})}{qB}. \quad (1.16)$$

**Различные случаи движения:**

1) Частица движется перпендикулярно линиям магнитной индукции.

$$\bar{v} \perp \bar{B} \Rightarrow$$

Частица будет двигаться по окружности радиуса

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

2) Частица движется параллельно линиям магнитной индукции.

$$\bar{v} \parallel \bar{B} \Rightarrow$$

Частица будет двигаться по прямой (сила Лоренца равна нулю):

$$F_{\perp} = 0.$$

3) Частица движется под углом к линиям магнитной индукции.

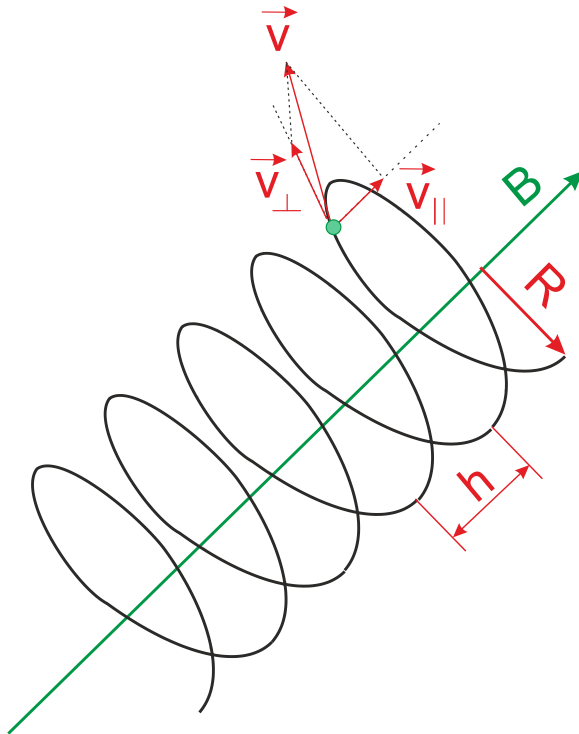
$$\angle \bar{v}, \bar{B} \neq \frac{\pi}{2}; \neq 0$$

Частица будет двигаться по спирали, радиусом

$$R = \frac{m v_{\perp}}{qB},$$

со скоростью поступательного движения

$$v_{\parallel} = v \cos(\angle \bar{v}, \bar{B}).$$



**Рисунок 1.7**

Общий случай движения заряженной частицы в магнитном поле

Шаг спирали  $h$  можно вычислить из следующих соображений:

Движение в плоскости, перпендикулярной направлению поступательного движения определяется перпендикулярной линиям магнитной индукции проекции скорости. Поэтому можем приравнять длину окружности пути, проходимому частицей за время  $t$  с этой скоростью:

$$\left. \begin{array}{l} S = v_{\perp} t \\ S = 2\pi R \end{array} \right\} \Rightarrow v_{\perp} t = 2\pi R,$$

и вычислить из этих соображений время одного оборота:

$$t = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi}{v_{\perp}} \cdot \frac{m v_{\perp}}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Умножив скорость параллельного линиям магнитной индукции движения на это время, получим искомый шаг спирали:

$$h = v_{\parallel} t = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{qB} = \frac{2\pi m v \cos(\angle \bar{v}, \bar{B})}{qB}.$$

В итоге, шаг спирали равен:

$$h = \frac{2\pi m v}{qB} \cos(\angle \bar{v}, \bar{B}). \quad (1.17)$$

## 1.4. Магнитное поле движущейся частицы

Уравнение выводится из закона Био–Савара–Лапласа с использованием тех же преобразований, что и при выводе *силы Лоренца* из *силы Ампера*.

Рассмотрим закон Био–Савара–Лапласа

$$d\bar{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\bar{l}, \bar{r}]}{r^3}.$$

Точнее, более удобно будет записать его в следующей форме:

$$d\bar{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I (d\bar{l} \times \bar{r})}{r^3}.$$

Учтём связь между скоростью и перемещением и тот факт, что вектора  $d\bar{r}$  и  $d\bar{l}$  по факту равны (*скорость есть путь на время*). Отсюда выразим элементарный касательный к кривой вектор  $d\bar{l}$  через скорость  $\bar{v}$  и элементарное время  $dt$ .

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{l}}{dt} \Rightarrow d\bar{l} = \bar{v} dt.$$

Подставим значение  $d\bar{l}$  в выражение и вынесем скалярную величину  $dt$  за скобки (*из под векторного произведения, используя его свойство дистрибутивности относительно умножения на числовой коэффициент*):

$$d\bar{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I (d\bar{l} \times \bar{r})}{r^3} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \left( \left( \frac{\bar{v} dt}{dt} \right) \times \bar{r} \right)}{r^3} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I (\bar{v} \times \bar{r}) dt}{r^3} = .$$

Теперь вспомним определение для силы тока:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

и подставим его в выражение:

$$= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I dt (\bar{v} \times \bar{r})}{r^3} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{\cancel{dq} \cancel{dt} (\bar{v} \times \bar{r})}{r^3} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{dq (\bar{v} \times \bar{r})}{r^3}.$$

Для перехода от элементарной магнитной индукции к магнитной индукции, проинтегрируем выражение для элементарной магнитной индукции по объёму, содержащему одну частицу ( $N=1$ ):

$$N = Vn \Rightarrow V = \frac{N}{n}; \quad N = 1 \Rightarrow V_{N=1} = \frac{1}{n},$$

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \int_{v=1/n} d\bar{B} = \int_{v=1/n} \frac{\mu\mu_0 (\bar{v} \times \bar{r}) dq}{4\pi r^3} = \frac{\mu\mu_0 \bar{v} \times \bar{r}}{4\pi r^3} \int_{v=1/n} dq = \\ &= \frac{\mu\mu_0 \bar{v} \times \bar{r}}{4\pi r^3} q = \frac{\mu\mu_0 q \bar{v} \times \bar{r}}{4\pi r^3}\end{aligned}$$

Формула для расчёта магнитного поля движущейся частицы будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \frac{\mu\mu_0 q [\bar{v}, \bar{r}]}{4\pi r^3}, \\ &\text{либо} \\ \bar{B} &= \frac{\mu\mu_0 q \bar{v} \times \bar{r}}{4\pi r^3}.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Теперь рассмотрим выражение магнитной индукции магнитного поля, создаваемого движущейся частицей, через напряжённость создаваемого ей в заданной точке электрического поля:

$$\bar{B} = \frac{\mu\mu_0 q \bar{v} \times \bar{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \bar{v} \times \left( \frac{1}{r^2} \frac{\bar{r}}{r} \right) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \bar{v} \times \left( \frac{q}{r^2} \bar{e}_r \right).$$

Запишем выражение для напряженности поля точечного заряда и преобразуем его:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \bar{e}_r \Rightarrow \frac{q}{r^2} \bar{e}_r = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \bar{E}.$$

Подставим в полученное выражение:

$$\bar{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \bar{v} \times \underbrace{\left( \frac{q}{r^2} \bar{e}_r \right)}_{4\pi\epsilon\epsilon_0 \bar{E}} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \bar{v} \times 4\pi\epsilon\epsilon_0 \bar{E} = \mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 \bar{v} \times \bar{E}.$$

В итоге получаем выражение для магнитной индукции движущегося заряда через напряжённость электрического поля:

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 [\bar{v}, \bar{E}], \\ &\text{либо} \\ \bar{B} &= \mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 \bar{v} \times \bar{E}.\end{aligned}\tag{1.19}$$

Или, учитывая следующие выражения для фазовой скорости света в среде и скорости света в вакууме

$$v_{\text{ф.света}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}} \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}},$$

можем записать для случая движения частицы в среде

$$\bar{B} = \frac{\bar{v} \times \bar{E}}{v_{\text{ф.света}}^2}$$

и случая движения частицы в вакууме

$$\bar{B} = \frac{\bar{v} \times \bar{E}}{c^2}.$$

Теперь, если подставить последнюю формулу в выражение для силы Лоренца получим

$$\bar{F} = q\bar{v}_1 \times \bar{B} = q\bar{v}_1 \times \frac{\bar{v}_2 \times \bar{E}}{c^2} = q \frac{\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 \times \bar{E}}{c^2},$$

Или для Обобщённой Силы Лоренца

$$\bar{F}_{\text{О.Л.}} = q \left( \bar{E} + \frac{\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 \times \bar{E}}{c^2} \right).$$

Это выражение ещё, конечно, не преобразование Лоренца в СТО, но некоторое сходство, согласитесь, угадывается...

## 1.5. Вихревой характер магнитного поля

### 1.5.1. Циркуляция и ротор вектора магнитной индукции (Закон полного тока)

Рассмотрим бесконечно длинный проводник и рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  по окружности, через центр которой он проходит (перпендикулярно плоскости окружности):

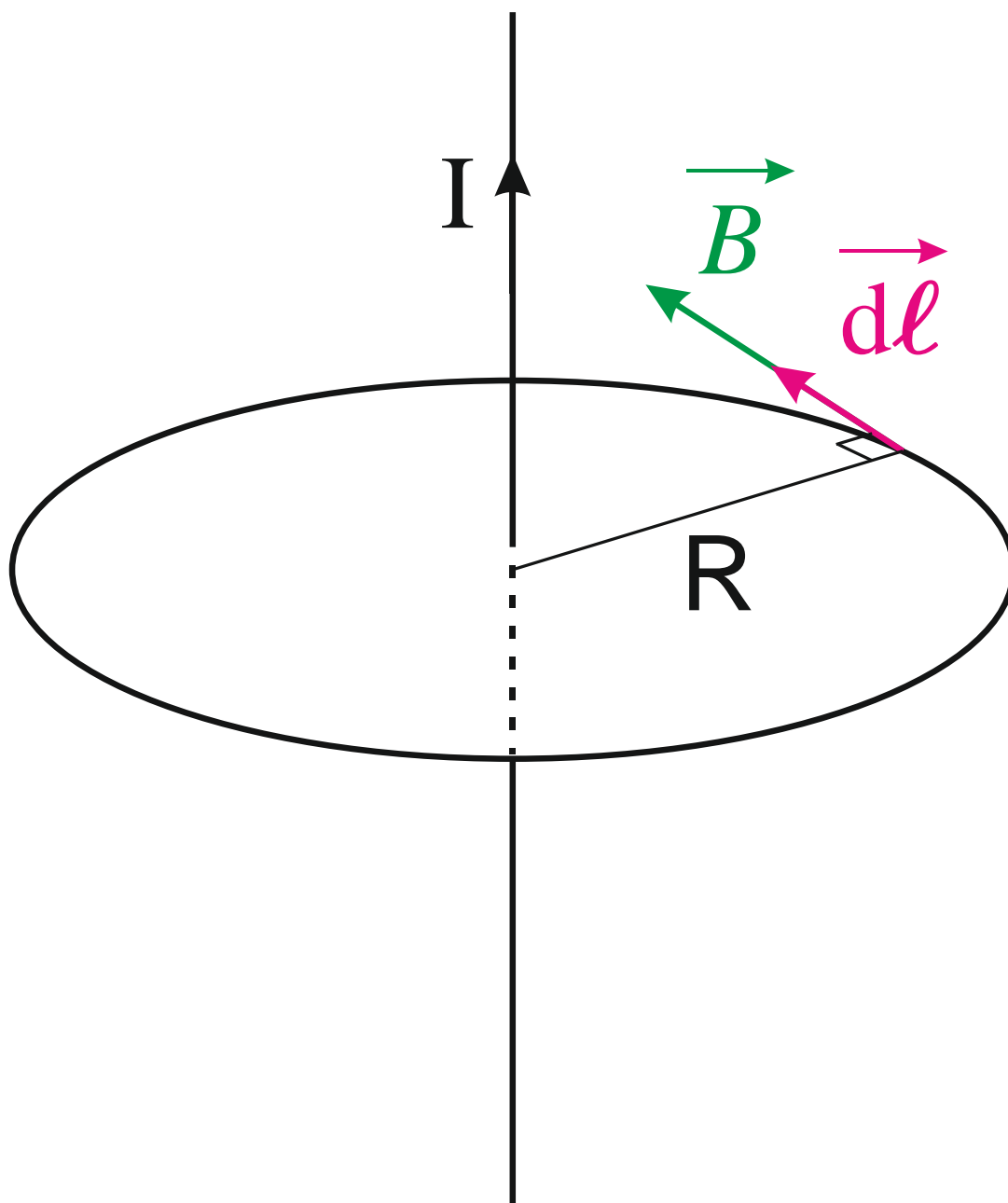


Рисунок 1.8

Циркуляция вектора магнитной индукции

$$\oint_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{l_1} B dl = \oint_{l_1} \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} dl = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \oint_{l_1} dl = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} 2\pi R = \mu\mu_0 I.$$

Здесь мы учли следующие факты (следующие формулы):

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$$

– магнитная индукция бесконечно длинного проводника (на расстоянии  $R$  от него, на расстоянии, описываемом окружностью радиуса  $R$ ),

$$\vec{B} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$$

– вектор магнитной индукции перпендикулярен элементарному касательному вектору к кривой  $l_1$ .

В результате мы получаем, что циркуляция по этому контуру равна силе тока, протекающего в проводнике, умноженной на магнитную проницаемость среды и магнитную постоянную (если не привязываться к системе СИ, надо сказать, что циркуляция пропорциональна силе тока):

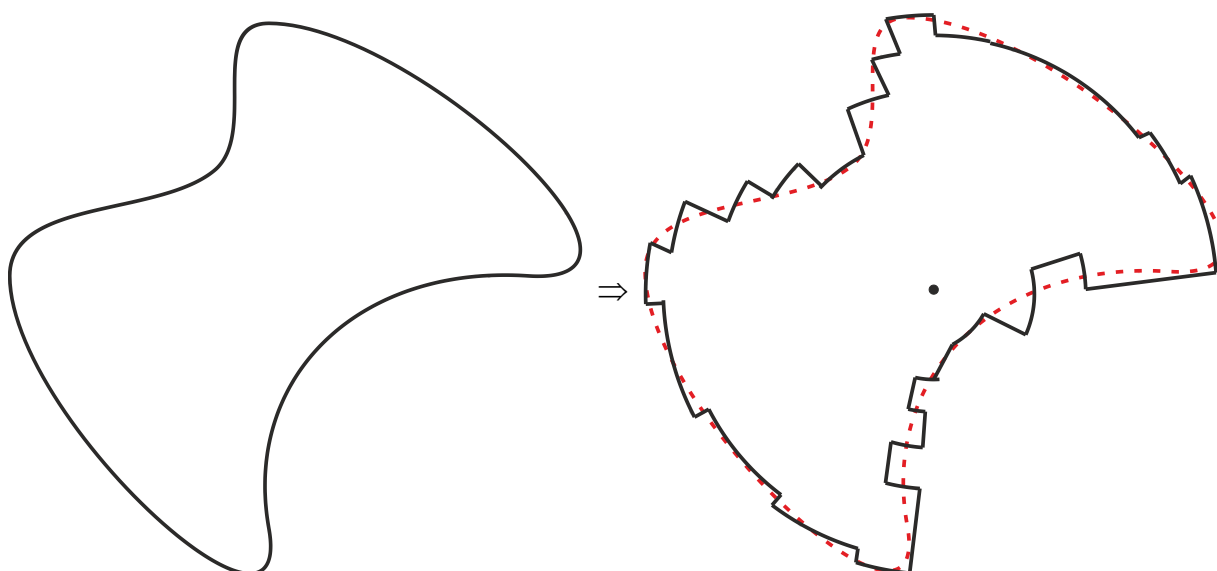
$$\oint_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 I.$$

**Замечание:** хотя циркуляция была рассмотрена на простом примере, данное выражение будет справедливо для контура произвольной формы и произвольного количества проводников произвольной формы. Для начала заметим, что интеграл по дуге произвольного угла зависит только от величины этого угла:

$$\int_{l_1} \vec{B} d\vec{l} = \int_{l_1} \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} d(R\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} R d\varphi = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \varphi$$

Затем разобьём произвольный контур на сектора и просуммируем интегралы. Получим (Рисунок 1.9):





**Рисунок 1.9**

Циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  по произвольному контуру

$$\oint_{l_1} \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{l} = \mu\mu_0 I.$$

Теперь просуммируем по всем циркуляциям (по всем токам), охватывающим все проводники:

$$\oint_{l_1} \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{l} = \oint_{l_1} \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{B}}_i \cdot d\bar{l} = \sum_{i=1}^n \oint_{l_1} \bar{\mathbf{B}}_i \cdot d\bar{l} = \sum_{i=1}^N \mu\mu_0 I_i = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^N I_i.$$

Получим для циркуляции (в произвольном случае): циркуляция вектора магнитной индукции пропорциональна сумме потоков, протекающих по проводникам, охватываемым этим контуром.

$$\oint_{l_1} \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{l} = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^N I_i. \quad (1.20)$$

Этот закон описывает **циркуляцию вектора индукции магнитного поля**. Он же есть **закон полного тока**.

*Дифференциальная форма.* Сначала перейдём от силы тока к вектору плотности тока:

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS} \Rightarrow I = \int_{S_1} \bar{\mathbf{j}} \cdot d\bar{\mathbf{S}}.$$

Отсюда:

$$\oint_{l_1} \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{l} = \mu\mu_0 \int_{S_1} \bar{\mathbf{j}} \cdot d\bar{\mathbf{S}},$$

$$\oint_{l_1} \bar{B} \cdot d\bar{l} = \int_{S_1} \mu\mu_0 \bar{j} \cdot d\bar{S} .$$

По теореме Стокса

$$\oint_{l_1} \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int_{S_1} \text{rot } \bar{A} \cdot d\bar{S} .$$

Тогда:

$$\oint_{l_1} \bar{B} \cdot d\bar{l} = \int_{S_1} \text{rot } \bar{B} \cdot d\bar{S} .$$

Приравнивая преобразованные правую и левую части, получаем:

$$\int_{S_1} \text{rot } \bar{B} \cdot d\bar{S} = \int_{S_1} \mu\mu_0 \bar{j} \cdot d\bar{S} .$$

Поскольку два интеграла по одной и той же поверхности равны независимо от формы поверхности, равны сами подынтегральные выражения.

В итоге:

$$\text{rot } \bar{B} = \mu\mu_0 \bar{j} . \quad (1.21)$$

Также можно доказать, что (следует из теоремы Стокса) правая часть не зависит от формы поверхности, охватываемой контуром (она не обязательно должна быть «натянута» на контур).

### 1.5.2. Теорема Гаусса вектора магнитной индукции

Поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность, как и его дивергенция, равны нулю, что является следствием отсутствия магнитных зарядов.

$$\oint_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 , \quad (1.22)$$

$$\text{div } \bar{B} = 0 . \quad (1.23)$$

**Замечание:** отсутствие магнитных зарядов не является доказанным фактом, и не следует не из каких теоретических посылок. Возможно, мы просто не можем обнаружить частицы – носители этих зарядов.

## 1.6. Магнитное поле соленоида и тороида

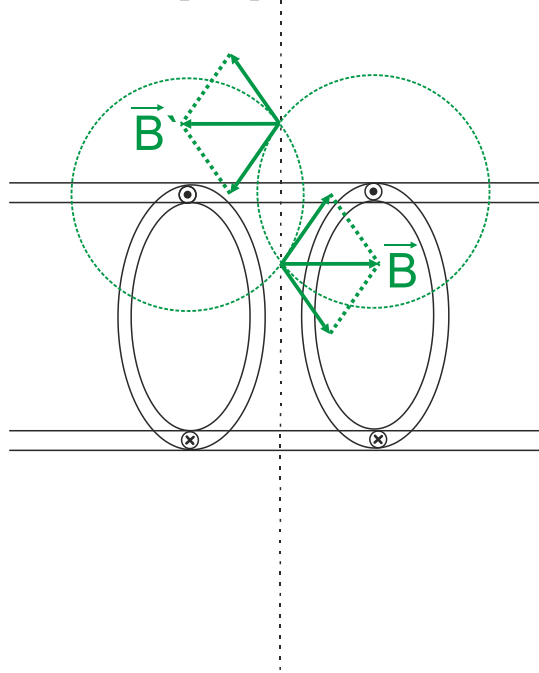
### 1.6.1. Поле соленоида

Вывод из учебника Савельева.

Рассмотрим бесконечный соленоид.

Пусть  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции внутри соленоида, а  $\vec{B}'$  – снаружи.

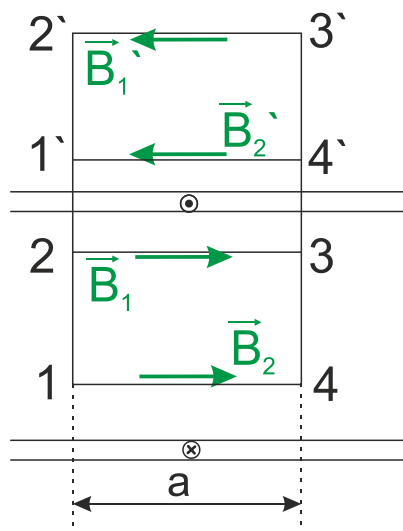
*Утверждение 1.* Вектора  $\vec{B}$  и  $\vec{B}'$  направлены параллельно оси соленоида  $OO'$  во всех точках пространства.



**Рисунок 1.10**

Направление вектора магнитной индукции внутри и вне соленоида

**Утверждение 2.** Поле внутри и снаружи соленоида является однородным – ветров магнитной индукции одинаков во всех точках внутри соленоида и одинаков во всех точках снаружи него.



**Рисунок 1.11**

Однородность поля внутри и вне соленоида

Рассмотрим циркуляцию поля по двум произвольным контурам  $1-2-3-4$  и  $1'-2'-3'-4'$  внутри и снаружи соленоида и покажем, что вектора  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  и  $\vec{B}'_1$ ,  $\vec{B}'_2$  не только параллельны, но и равны:

*Внутри.*

Циркуляция равна:

$$\oint_{1-2-3-4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1 a - B_2 a = (B_1 - B_2) a .$$

По закону полного тока выражение

$$\oint_{1-2-3-4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 I \Rightarrow (B_1 - B_2) a = \mu\mu_0 I = 0$$

равно нулю, так контур не охватывает никакого тока. Отсюда:

$$B_1 - B_2 = 0 \Rightarrow B_1 = B_2 = B .$$

*Снаружи.* Совершенно аналогично:

$$\oint_{1'-2'-3'-4'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B'_1 a - B'_2 a = (B'_1 - B'_2) a ,$$

$$\oint_{1'-2'-3'-4'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 I \Rightarrow (B'_1 - B'_2) a = \mu\mu_0 I = 0 ,$$

$$B'_1 - B'_2 = 0 \Rightarrow B'_1 = B'_2 = B' .$$

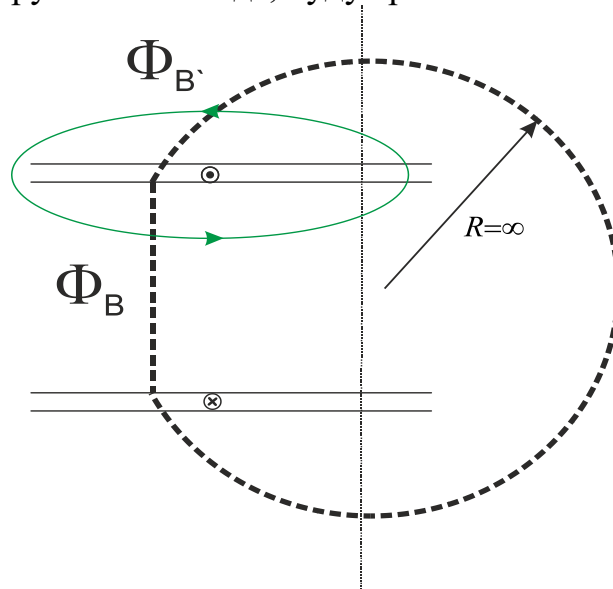
**Утверждение 3.** Сумма векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{B}'$  пропорциональна плотности витков и силе тока в одном витке. Рассмотрим циркуляцию по контуру  $1'-2-3-4'$  на том же рисунке. Учтём, что этот контур охватывает несколько витков и их число можно вычислить, как произведение длины стороны  $a$  на плотность витков  $n$  (число витков на единицу длины):

$$\oint_{1'-2-3-4'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = Ba + B'a = (B + B')a ,$$

$$\oint_{1'-2-3-4'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 I \Rightarrow (B + B')a = \mu\mu_0 nI a ,$$

$$B + B' = \mu\mu_0 nI .$$

**Утверждение 4.** Если рассмотреть поток вектора магнитной индукции через бесконечную плоскость, перпендикулярную соленоиду (она охватывает весь бесконечный соленоид), поток  $\Phi_B$  через часть плоскости, расположенную внутри соленоида и поток  $\Phi_{B'}$  через часть плоскости, расположенную снаружи соленоида, будут равны по абсолютной величине:



**Рисунок 1.12**

Поток вектора магнитной индукции внутри и вне соленоида

Поток магнитной индукции через выбранную поверхность равен сумме потоков внутри соленоида  $\Phi_B$ , снаружи соленоида  $\Phi_{B'}$  и потоку через заднюю сторону замкнутой поверхности, которая охватывает бесконечный соленоид где-то на бесконечности. Но последний поток равен нулю, так как на бесконечности поле равно нулю:

$$\oint_{S_1(R \rightarrow \infty)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_B + \Phi_{B'} + 0 = \Phi_B + \Phi_{B'} .$$

Но поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность всегда равен нулю (теорема Гаусса для магнитного поля). Тогда:

$$\oint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \Phi_B + \Phi_{B'} = 0,$$

$$\Phi_B = -\Phi_{B'}.$$

Из последнего утверждения можно сделать вывод о равенстве произведения магнитной индукции на площадь соответствующей поверхности:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_B &= \oint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS_1 \\ \Phi_{B'} &= \oint_{S'_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B'S'_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow BS_1 = -B'S'_1.$$

**Утверждение 5.** Индукция магнитного поля вне соленоида равна нулю ( $\vec{B}' = 0$ ). Это следует из того, что на самом деле поверхность  $S'_1$  бесконечна:

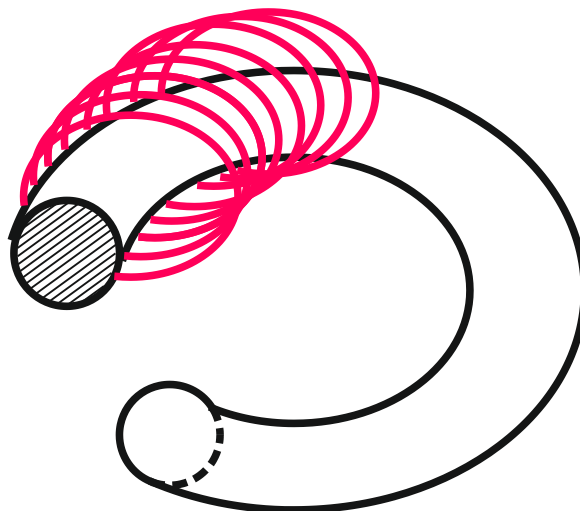
$$B = -\frac{B'S'_1}{S_1}, S'_1 = \infty \Rightarrow B' = 0.$$

**В итоге,** магнитная индукция бесконечного соленоида в системе **СИ** равна:

$$B = \mu\mu_0 nI. \quad (1.24)$$

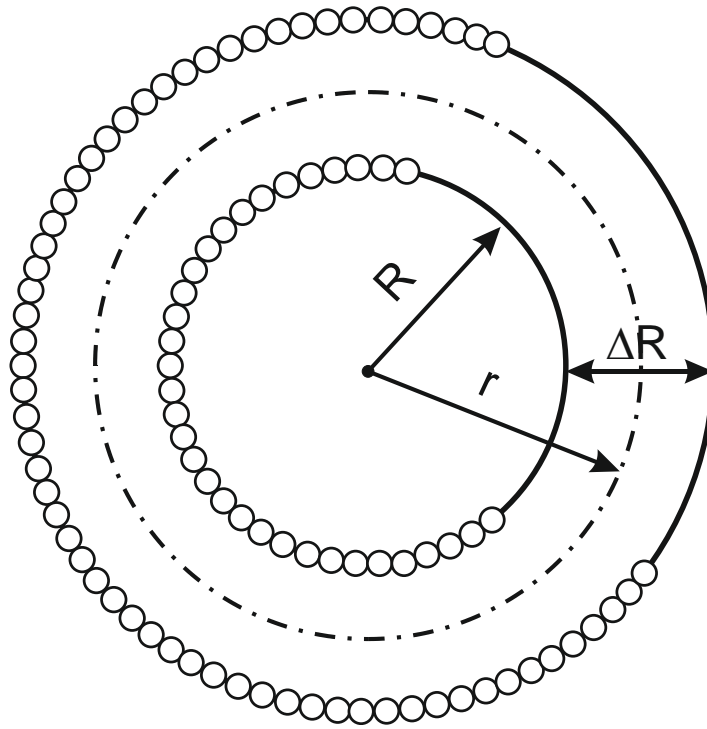
### 1.6.2. Поле тороида и другой вывод для поля соленоида

**Поле тороида.** На всякий случай напомним, что в данном случае тороид (катушка индуктивности, магнитная катушка в форме тора) – «бублик» с намотанной на него проволокой, Рисунок 1.13.



**Рисунок 1.13**

Тороид (катушка индуктивности в форме тороида)



**Рисунок 1.14**

Тороид – принятые обозначения

Для вывода расчётной формулы будем использовать *закон полного тока* (иначе *циркуляцию вектора магнитной индукции*) (1.20):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$

Если в качестве замкнутой кривой, по которой будет производиться интегрирование, взять окружность с центром в центре тора, вектор магнитной индукции во всех точках этой окружности (этого контура) будет параллельна элементу касательной  $d\vec{l}$  :

$$\vec{B} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl$$

и скалярное произведение  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  превратится в простое умножение  $B dl$  .

Также можно заметить (из соображений симметрии), что вектор магнитной индукции будет иметь одно и тоже значение во всех точках контура (нашей окружности):

$$\vec{B} = \text{const} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \cdot S_{\text{окр.}} = 2\pi r_{\text{окр.}} B$$

И интеграл сведётся к умножению значения вектора магнитной индукции  $B$  на дину кривой, то есть на длину окружности.

Рассмотрим для начала контур в виде окружности с радиусом меньше, чем внутренний радиус тора. Эта окружность не охватывает ни одного проводника с током. Следовательно поток вектора магнитной индукции в данном случае будет равен 0:

$$r_{\text{внутр.}} < R \Rightarrow \sum_{i=1}^N I_i = 0 \Rightarrow$$

$$2\pi r_{\text{внутр.}} B = 0$$

Но тогда 0 будет равен и сам вектор магнитной индукции:

$$B_{\text{Внутри тора}} = 0$$

Теперь рассмотрим контур в виде окружности с радиусом, превосходящим внешний радиус тора. Количество токов, охватываемых контуром, которые текут в одном направлении, будет равно количеству токов, текущих в другом направлении (контур в данном случае будет охватывать ту часть вика, по которой ток течёт вверх и ту, по которой ток течёт вниз). Следовательно, полный ток в данном случае тоже будет равен 0. Нулю будет равна и магнитная индукция вне тороида.

$$r_{\text{внешн.}} < R + \Delta R \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^N I_i}_{\text{С внутренней стороны}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (-I_i)}_{\text{С внешней стороны}} = 0 \Rightarrow$$

$$2\pi r_{\text{внешн.}} B = 0$$

$$B_{\text{Снаружи тора}} = 0$$

В итоге, мы доказали, что везде вне тороида магнитная индукция будет равна 0.

А теперь возьмём в качестве контура интегрирования окружность, проходящую по оси тора. Полный ток в данном случае будет равен количеству витков, умноженному на силу тока в одном витке:

$$r = R + \frac{\Delta R}{2} \Rightarrow 2\pi r B = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^N I_i = \mu\mu_0 N I \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^N I_i = n \cdot S_{\text{окр. радиуса } R} \cdot I = 2\pi R n I \Rightarrow$$

Здесь мы заменили общее количество витков на произведение плотности витков (количества витков на единицу длины) на длину контура тора (в данном случае мы считаем по внутреннему диаметру тора).

Теперь подставим полученный результат в преобразованный для нашего случая вид выражения закона полного тока и немного упростим:

$$\cancel{2\pi} r B = \mu\mu_0 \cancel{2\pi} R n I$$

$$r B = \mu\mu_0 n R I$$

$$B = \mu\mu_0 n I \frac{R}{r}$$



Мы получили выражение для магнитного поля тороида (на оси тороида, это поле не однородно)

$$B = \mu\mu_0 nI \frac{R}{r}. \quad (1.25)$$

Теперь можно рассмотреть другой, более простой вариант вывода формулы магнитной индукции бесконечного соленоида. Во-первых заметим, что радиус кривой, по которой мы вели интегрирование, то есть окружности, проходящей по оси тора, можно выразить через малый радиус самого тора и радиус кольца, образующего тор. Подставим это выражение в формулу магнитной индукции тороида:

$$r = R + \frac{\Delta R}{2} \Rightarrow B = \mu\mu_0 nI \frac{R}{R + \frac{\Delta R}{2}}$$

Бесконечный соленоид можно представить, как тор с бесконечно большим внутренним радиусом. При этом обратите внимание, радиус окружности, образующий тор, остаётся прежним! Запишем наше выражение, как предел и вычислим этот предел по правилам математического анализа:

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \mu\mu_0 nI \frac{R}{R + \frac{\Delta R}{2}} =$$

Вынесем за знак предела все константы.

$$= \mu\mu_0 nI \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{R + \frac{\Delta R}{2}} =$$

Умножим выражение под пределом на 1, представив её, как  $R/R$ .

$$= \mu\mu_0 nI \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{R + \frac{\Delta R}{2}} \cdot \frac{R}{R} =$$

А теперь преобразуем выражение таким образом, чтобы и числитель и знаменатель поделить на  $R$ .

$$= \mu\mu_0 nI \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\frac{R}{R}}{\frac{R}{R} + \frac{\Delta R}{2R}} =$$

Два из полученных частных сократятся и превратятся в единицу. Третье будет сражаться к нулю.

$$= \mu\mu_0 nI \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\Delta R}{2R}} =$$

$$\rightarrow 0$$

Вычислим наш предел.

$$= \mu\mu_0 nI$$

Мы получили абсолютно такое же выражение для магнитной индукции бесконечного соленоида, как и выражение, полученное нами без привлечения формулы магнитной индукции тороида.

$$B_{\text{Соленоида}} = \mu\mu_0 nI$$

Однако этот вывод несколько короче.

## 1.7. Магнитный момент

Рассмотрим контур с током в магнитном поле. Для характеристики контура с током используется величина, называемая **магнитным моментом**:

$$\bar{p}_m = I\bar{S}, \quad (1.26)$$

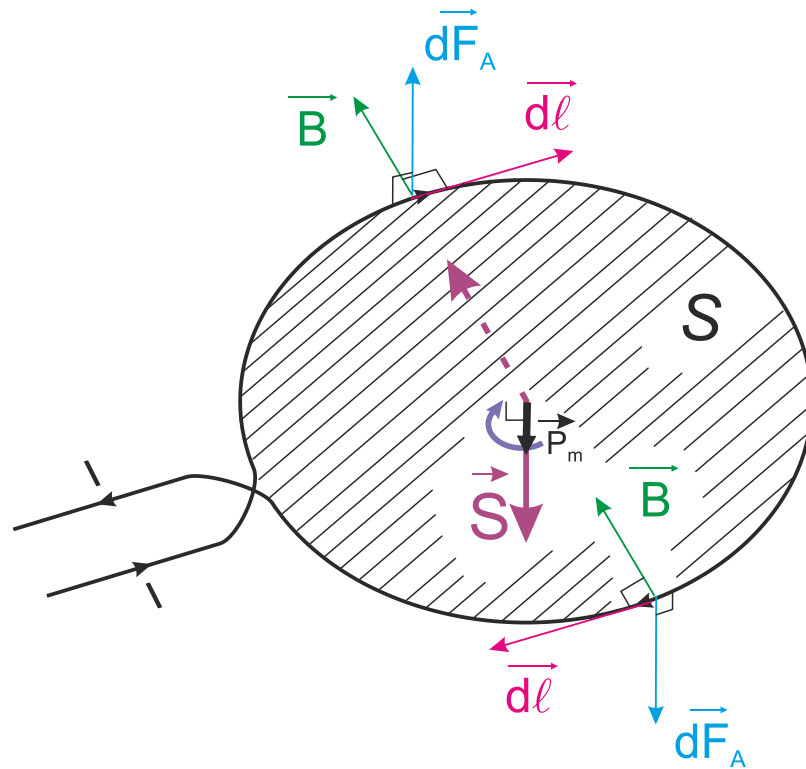
или (без использования вектора ориентированной поверхности)

$$\bar{p}_m = IS\bar{n}.$$

$\bar{S} = S\bar{n}$  – вектор, ориентированный поверхности площади к нормали.

Измеряется в амперах, умноженных на метр квадратный,

$$[A \cdot m^2] = [A][m]^2 = \frac{[Дж]}{[Тл]}.$$



**Рисунок 1.15**  
Магнитный момент контура с током

Суммарная сила Ампера, действующая на контур равна нулю, однако на контур будет действовать момент силы, разворачивающий контур так, чтобы сориентировать магнитный момент параллельно вектору магнитной индукции (для однородного магнитного поля)

В неоднородном магнитном поле на контур с током будет действовать сила пропорциональная вектору магнитной индукции и градиенту поля.

Для сравнения приведём в виде таблицы основные соотношения, касающиеся электрического и магнитного моментов:

**Таблица 1.1**

Сравнение силовых характеристик электрического и магнитного полей

Магнитное поле – <i>магнитный момент</i> (контур с током)	Электрическое поле – <i>электрический момент</i> (диполь)
1	2
$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\bar{p}_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}$ $R \ll r \Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\bar{p}_m}{r^3}$	$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}$

Магнитное поле – <i>магнитный момент</i> (контур с током)	Электрическое поле – <i>электрический момент</i> (диполь)
1	2
1	2
$\bar{M} = [\bar{p}_m, \bar{B}]$ <p style="text-align: center;"><i>или</i></p> $\bar{M} = \bar{p}_m \times \bar{B}$	$\bar{M} = [\bar{p}, \bar{E}]$ <p style="text-align: center;"><i>или</i></p> $\bar{M} = \bar{p} \times \bar{E}$
$\bar{F} = \bar{p}_m \frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{p}_m}$ $\left( \bar{F} = \bar{p}_m \frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{l}}, \bar{l} \parallel \bar{p}_m \right)$	$\bar{F} = \bar{p} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{p}}$ $\left( \bar{F} = \bar{p} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{l}}, \bar{l} \parallel \bar{p} \right)$
$W = -(\bar{p}_m, \bar{B})$ <p style="text-align: center;"><i>или</i></p> $W = -\bar{p}_m \cdot \bar{B}$	$W = -(\bar{p}, \bar{E})$ <p style="text-align: center;"><i>или</i></p> $W = -\bar{p} \cdot \bar{E}$

## 2. Магнитное поле в веществе

### 2.1. Молекулярные токи и намагниченность

Магнитное поле в веществе будет складываться из магнитного поля внешнего источника (*магнитного поля тока*) и суммарного магнитного поля молекулярных источников. Последние – это поля, возникающего за счёт наличия магнитных моментов у отдельно взятых молекул, групп атомов или элементов вещества ( $\bar{B}$  – результирующее поле, измеряем прибором;  $\bar{B}_0$  – внешнее поле, определяется электрическим током или движением заряженных частиц независимо от вещества;  $\bar{B}'$  – поле *молекулярных токов*):

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}' .$$

Возьмём ротор от левой и правой части:

$$\text{rot } \bar{B} = \text{rot } \bar{B}_0 + \text{rot } \bar{B}'$$

и подставим сюда выражение ротора через плотность тока, полученное из теоремы о циркуляции магнитного поля (*закон полного тока*)

$$\text{rot } \bar{B}_0 = \mu_0 \bar{j} ,$$

$$\text{rot } \bar{B}' = \mu_0 \bar{j}_{\text{мол}} .$$

Получим:

$$\text{rot } \bar{B} = \underbrace{\text{rot } \bar{B}_0}_{\mu_0 \bar{j}} + \underbrace{\text{rot } \bar{B}'}_{\mu_0 \bar{j}_{\text{мол}}} = \mu_0 \bar{j} + \mu_0 \underbrace{\bar{j}_{\text{мол}}}_{\text{rot } \bar{J}} \quad (2.1)$$

А теперь введём новое понятие, которое будет характеризовать *среднюю плотность магнитных моментов молекулярных токов* (аналогично *поляризованности вещества для электростатического поля в диэлектрике*):

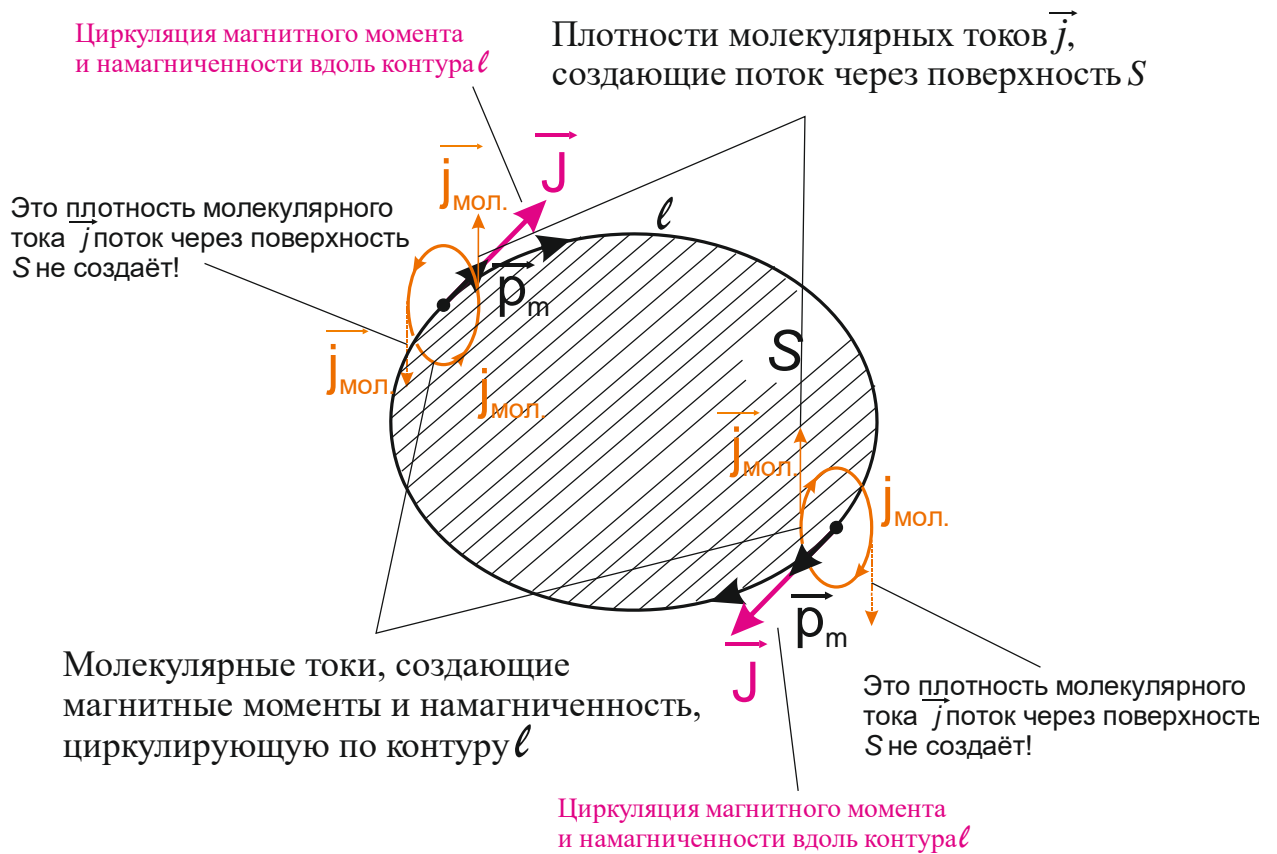
**Df.** *Намагниченность:*

$$\bar{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \bar{p}_m . \quad (2.2)$$

Для неё (*для намагниченности*) можно доказать теорему о циркуляции, аналогично теореме о потоке для вектора *поляризованности* в диэлектрике.

### 2.2. Теорема о циркуляции намагниченности в веществе

Пусть каким-то образом (допустим, за счёт внешнего магнитного поля) все магнитные моменты сориентировались вдоль одной замкнутой кривой. Вместе с ними вдоль этой кривой «построилась» и намагниченность. Рассмотрим циркуляцию намагниченности вдоль этой кривой. Из Рисунок 2.1 видно, что она определяется потоком плотности молекулярных токов через поверхность, охваченную контуром.



**Рисунок 2.1**

Циркуляция вектора намагниченности в веществе

Можно доказать следующую теорему:

**Th.** О циркуляции вектора намагниченности:

$$\int_{S_1} \vec{j}_{\text{мол}} \cdot d\vec{S} = \oint_{l_1} \vec{J} \cdot d\vec{l} \quad (2.3)$$

Поток плотности молекулярных токов через поверхность равен циркуляции намагниченности по контуру, ограничивающему эту поверхность.

И её следствие – теорема о намагниченности в дифференциальной форме. По теореме стокса:

$$\oint_{l_1} \vec{J} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \text{rot } \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad .$$

Подставив в интегральную форму, получим:

$$\int_{S_1} \vec{j}_{\text{мол}} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \text{rot } \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad .$$

Поскольку интегралы равны для любой поверхности  $S_1$ , равны и подинтегральные выражения:

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \vec{J} \quad (2.4)$$

Это и есть теорема о циркуляции вектора намагниченности в дифференциальной форме. Она нам скоро понадобится.

### 2.3. Напряжённость магнитного поля и магнитная проницаемость среды

Распишем первое уравнение (о суммарном магнитном поле) в роторах (возьмём ротор от левой и правой частей) – уравнение (2.1) и используем все полученные только что результаты:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{B} &= \underbrace{\operatorname{rot} \bar{B}_0}_{\mu_0 \bar{j}} + \underbrace{\operatorname{rot} \bar{B}'}_{\mu_0 \bar{j}_{\text{мол}}} = \mu_0 \bar{j} + \mu_0 \underbrace{\bar{j}_{\text{мол}}}_{\operatorname{rot} \bar{J}} = \\ &= \mu_0 \bar{j} + \mu_0 \operatorname{rot} \bar{J} = \mu_0 (\bar{j} + \operatorname{rot} \bar{J}) \Rightarrow \\ &\frac{\operatorname{rot} \bar{B}}{\mu_0} - \operatorname{rot} \bar{J} = \bar{j}. \end{aligned}$$

Что мы сделали? Подставили вместо роторов их выражение через плотности тока, вместо плотности молекулярных токов подставили доказанное в предыдущем разделе выражение (теорема о циркуляции намагниченности в веществе в дифференциальной форме), как ротор намагниченности и вынесли константу  $\mu_0$ . Затем из полученного выражения мы выразили плотность тока.

Теперь внесём константу  $\mu_0$  под знак ротора (это можно – ротор дифференциальный оператор, а константу можно вносить и выносить под знак производной)

$$\operatorname{rot} \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \operatorname{rot} \bar{J} = \bar{j}.$$

И по свойству линейности учтём, что разность роторов есть ротор разности:

$$\operatorname{rot} \left( \underbrace{\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{J}}_{\bar{H}} \right) = \bar{j}.$$

Под знаком ротора (**rot**) мы получили физическую величину, характеризующую магнитное поле и зависящую только от токов, создающих исходное поле и не зависящую от молекулярных токов, то есть от свойств вещества:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{J}. \quad (2.5)$$

**Df.** Величина  $\bar{H}$  в уравнении (2.5) называется вектором напряжённости магнитного поля.

Измеряется в амперах на метр,  $[A/m] = \frac{[A]}{[m]}$ .

Для неё имеем:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}. \quad (2.6)$$

Очевидно, что намагниченность будет пропорциональна этой величине (можно также утверждать, что намагниченность пропорциональна результирующему магнитному полю в веществе, но это утверждение тоже справедливо и более удобно для построения дальнейшей теории):

$$\bar{J} = \chi \bar{H}, \quad (2.7)$$

где

$\chi$  – магнитная восприимчивость среды, безразмерная величина.

Подставим в определение напряжённости магнитного поля  $\bar{H}$  (2.5) только что предложенное соотношение (2.7). Получим:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{J} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \chi \bar{H} \Rightarrow \bar{H} + \chi \bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0}.$$

Теперь выразим из этого уравнения напряжённость магнитного поля, как функцию магнитной индукции:

$$\bar{H}(1 + \chi) = \frac{\bar{B}}{\mu_0},$$
$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0 \left( \underbrace{1 + \chi}_{\mu} \right)}.$$

Мы ввели новое понятие  $\mu$  – магнитной проницаемости среды:

**Df.** Магнитная проницаемость среды есть физическая величина, определяемая формулой:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (2.8)$$

Тогда соотношение между напряжённостью и индукцией магнитного поля примет вид:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0 \mu} \quad (2.9)$$

или

$$\bar{B} = \mu_0 \mu \bar{H}. \quad (2.10)$$



Выражение *циркуляции* (закон полного тока) и выражение для магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника примут вид:

$$\oint_{l_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k, \quad (2.11)$$

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (2.12)$$

Напоследок запишем в виде таблицы ряд ведущих соотношений для магнитного и электрического полей, касающихся взаимодействия данного поля с веществом (*характеристик данного поля в веществе*):

**Таблица 2.1**

Сравнение электрического и магнитного моментов

$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_m$	$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$
$\vec{J} = \chi \vec{H} \text{ (после } \mathbf{Df} \vec{H} \text{)}$	$\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$
$\int_{S_1} \vec{j}_{\text{мол}} \cdot d\vec{S} = \oint_{l_1} \vec{J} \cdot d\vec{l}$ $\oint_{l_1} \vec{J} \cdot d\vec{l} = I_{\text{мол}}$	$\oint_{S_1} \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q'$
$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
$\mu = 1 + \chi$	$\epsilon = 1 + \kappa$
$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$	$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$

## 2.4. Магнитные свойства вещества – виды магнетиков

Магнитная восприимчивость  $\chi$  является безразмерной величиной и характеризует единицу объёма. Вместо неё обычно пользуются магнитной восприимчивостью, отнесённой к  $1$  молю вещества:

$$\chi_M = \chi V_M,$$

где

$V_M$  – молярный объём.

В зависимости от величина магнитной восприимчивости и магнитной проницаемости вещества делятся на 3-и класса:

1. *Диамагнетики* – вещества, обладающие значением магнитной проницаемости чуть меньше  $1$  и небольшим отрицательным значением магнитной восприимчивости ( $\chi_M = -10^{-11} \div -10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}$ ).
2. *Парамагнетики* – вещества с магнитной проницаемостью немного больше  $1$  и небольшим положительным значением магнитной восприимчивости ( $\chi_M = 10^{-10} \div 10^{-9} \text{ м}^3/\text{моль}$ ).
3. *Ферромагнетики* – вещества с магнитной проницаемостью сильно больше  $1$  и очень большими значениями магнитной восприимчивости ( $\chi_M \sim 1 \text{ м}^3/\text{моль}$ ). Кроме того, в отличии от диа- и парамагнетиков, их магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость зависит от напряжённости магнитного поля, то есть изменяется вместе с изменением внешнего воздействия.

Таким образом, у намагниченность  $\mathbf{J}$  в веществе может как совпадать по направлению с напряжённостью магнитного поля  $\mathbf{H}$  (у пара- и ферромагнетиков, при этом они притягиваются магнитным полем), так и иметь противоположное направление (у диамагнетиков, при этом они выталкиваются полем). В случае электрического поля мы имели всегда одно и тоже направление поляризованности  $\mathbf{P}$  – она была всегда сонаправлена с вектором напряжённости поля  $\mathbf{E}$ .

Разберём каждый из классов.

*Диамагнетики.* Такими свойствами обладают вещества, молекулы которых имеют нулевой собственный магнитный момент. В приближении модели атома по Бору представим, что электрон летает по круговой орбите. Но  $s$ -орбиталь всё-таки имеет сферическую форму, а не форму, как у колец Сатурна ☺. Представим, что электрон пролетает по этой сфере по всем возможным орбитам. В этом случае средний магнитный момент такого движения будет равен  $0$ .

Тем не менее, движущийся по орбите электрон будет взаимодействовать с магнитным полем. Действие внешней силы на такой волчок вызовет прецессию этого волчка (следует из закона сохранения момента импульса). Но вот это вот движение уже будет создавать магнитный момент. Причём он будет направлен против поля (это можно доказать...). В

результате возникнет собственный магнитный момент и намагниченность, ориентированная против внешнего магнитного поля (*против вектора напряжённости магнитного поля*). Сравните с принципом Ле Шателье (*хотя, как мы скажем позже, он как раз и позаимствован из магнетизма*) – система пытается компенсировать внешнее воздействие на себя.

**Парамагнетики.** Такими свойствами обладают вещества, молекулы которых обладают собственным магнитным моментом. В этом случае уже существующие магнитные моменты будут ориентироваться по полю, создавая при этом намагниченность, ориентированную в направлении внешнего поля, то есть в направлении напряжённости магнитного поля.

Магнитная восприимчивость, а, следовательно, и магнитная проницаемость парамагнетиков не будет зависеть от напряжённости поля. Однако для них будет выполняться закон Кюри (*был экспериментально открыт Пьером Кюри*), описывающий зависимость магнитной восприимчивости от термодинамической температуры:

$$\chi_M = \frac{C}{T}, \quad (2.13)$$

где

$$C = \frac{\mu_0 \mu^3 n}{3k}$$

– постоянная Кюри.

Здесь

$\mu_0$  – магнитная постоянная (*магнитная проницаемость вакуума*),

$\mu$  – собственный магнитный момент частиц (*атомов, молекул*),

$n = \frac{N}{V}$  – концентрация частиц,

$N$  – число частиц,

$V$  – занимаемый частицами объём,

$k$  – постоянная Больцмана

На ферромагнетиках мы остановимся отдельно.

## 2.5. Ферромагнетики

Магнитные свойства *ферромагнетиков* определяется *спиновым магнитным моментом электронов* этого вещества. Скажем пару слов о *спине*.

**Спин** – это свойство ряда элементарных частиц, в частности *электрона*, заключающееся в наличии у них *собственного момента импульса* и *магнитного момента*. Напомним, момент импульса – характеристика вращающегося тела, в частности волчка. Вращающееся тело обладает моментом импульса, не равным нулю. Если это тело ещё и имеет *электрический заряд*, то вместе с моментом импульса у него возникнет и

*магнитный момент* – вращение заряженного тела можно воспринимать, как движущийся по кругу электрический ток. В связи с этим *спин* мы могли бы воспринимать, как свойства элементарной частицы, которая представляет собой заряженное тело, вращающееся вокруг своей оси. Однако это не так.

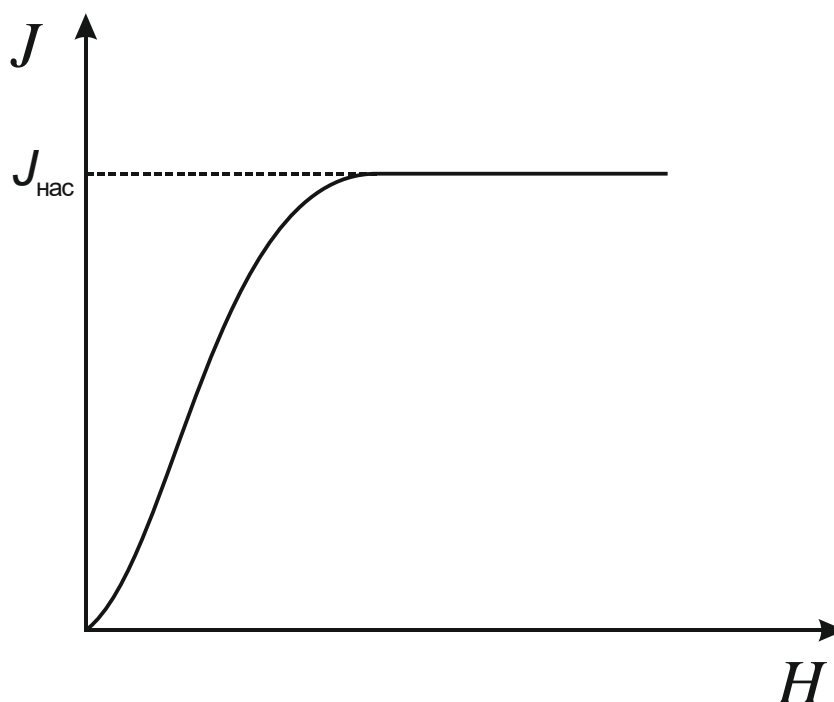
Модель заряженного волчка на самом деле не выдерживает критики: во-первых, не выполняется гироскопическое соотношение – отношение момента импульса к магнитному моменту, да и если попытаться рассчитать скорость этого вращения, она должна в 64раза превосходить скорость света! Но подробно этот факт мы рассмотрим в разделе *квантовая механика*.

Таким образом, мы будем считать, что *спин* – это некоторое внутреннее свойство элементарной частицы, не имеющее аналогов в макромире. Следуя этому утверждению, мы можем воспринимать спиновый магнитный момент, как собственный магнитный момент элементарной частицы (*и собственный магнитный момент вещества*). В принципе, это верное утверждение. Также мы можем утверждать, что этот магнитный момент не связан ни с каким движением частицы. *Вот это уже не до конца верно!* Стоит вспомнить хотя бы то, что магнитное поле есть преобразованное электрическое поле в подвижной системе координат (*повёрнутое с помощью преобразования Лоренца*) – для этого преобразования всё-таки нужно, чтобы что-то куда-то двигалось! Более точно было бы сказать, что спин связан с некоторой внутренней свободой (свободой движения) элементарной частицы, природу которой мы на сегодняшний день не знаем. *Но вторую половину этой фразы мы будем произносить шёпотом ☺...*

*Причина возникновения ферромагнетизма.* Ферромагнетики отличаются способностью взаимно ориентировать спиновые магнитные моменты в пределах так называемого домена. В пределах домена спиновые магнитные моменты электронов спонтанно ориентируются в одном и том же направлении, достигая при этом предельной намагниченности (*об этом чуть ниже*). Однако сами домены внутри ферромагнетика ориентированы хаотично. По этой причине суммарный магнитный момент (*намагниченность*) ферромагнетика равен нулю.

При наложении внешнего магнитного поля с напряжённостью  $H$  домены начинают преобразовываться по мере роста напряжённости поля. На первом этапе домены, ориентация магнитных моментов которых наиболее совпадает с внешним полем, начинают поглощать соседние домены, которые имеют больший угол магнитных моментов с полем. Это происходит до тех пор, пока весь ферромагнетик не превратится в единый домен. На втором этапе уже магнитные моменты этого домена начинают поворачиваться по полю, пока намагниченность ферромагнетика не достигнет значения *намагниченности насыщения* –  $J_{нас}$ .

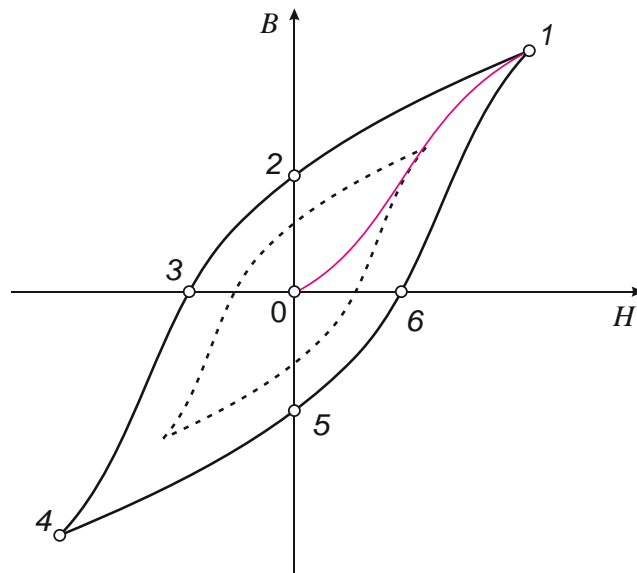
Иллюстрация процесса насыщения для намагниченности ферромагнетика приведена на Рисунок 2.2:



**Рисунок 2.2**  
 Предельная намагниченность ферромагнетиков

Отметим ещё несколько свойств ферромагнетиков. Первое из них – это наличие остаточной намагниченности и явление гистерезиса. Рассмотрим кривую, приведённую на Рисунок 2.3. Здесь изображена зависимость индукции магнитного поля в ферромагнетике от его напряжённости. Напомним, напряжённость  $H$  характеризует исходное магнитное поле, независимо от наличия или отсутствия ферромагнетика (она зависит только от токов, создающих магнитное поле). Магнитная индукция  $B$  – это то поле, которое мы можем измерить прибором, с учётом как магнитного поля токов, так и собственных магнитных моментов ферромагнетика.

Первоначально кривая намагниченности описывается кривой 0-1 – индукция магнитного поля растёт вместе с напряжённостью (правда нелинейно, но это вполне понятно – за счёт собственных магнитных моментов). Но если в некоторый момент времени мы вдруг перестанем превышать напряжённость и начнём её уменьшать, то процесс уже не пойдёт по той же кривой. При уменьшении напряжённости поля (*уменьшении внешнего поля*) процесс будет описываться кривой 1-2 и в точке 2, когда мы совсем «отключим внешнее поле», у ферромагнетика останется *остаточная намагниченность*. Ферромагнетик приобретёт свойства постоянного магнита.



**Рисунок 2.3**

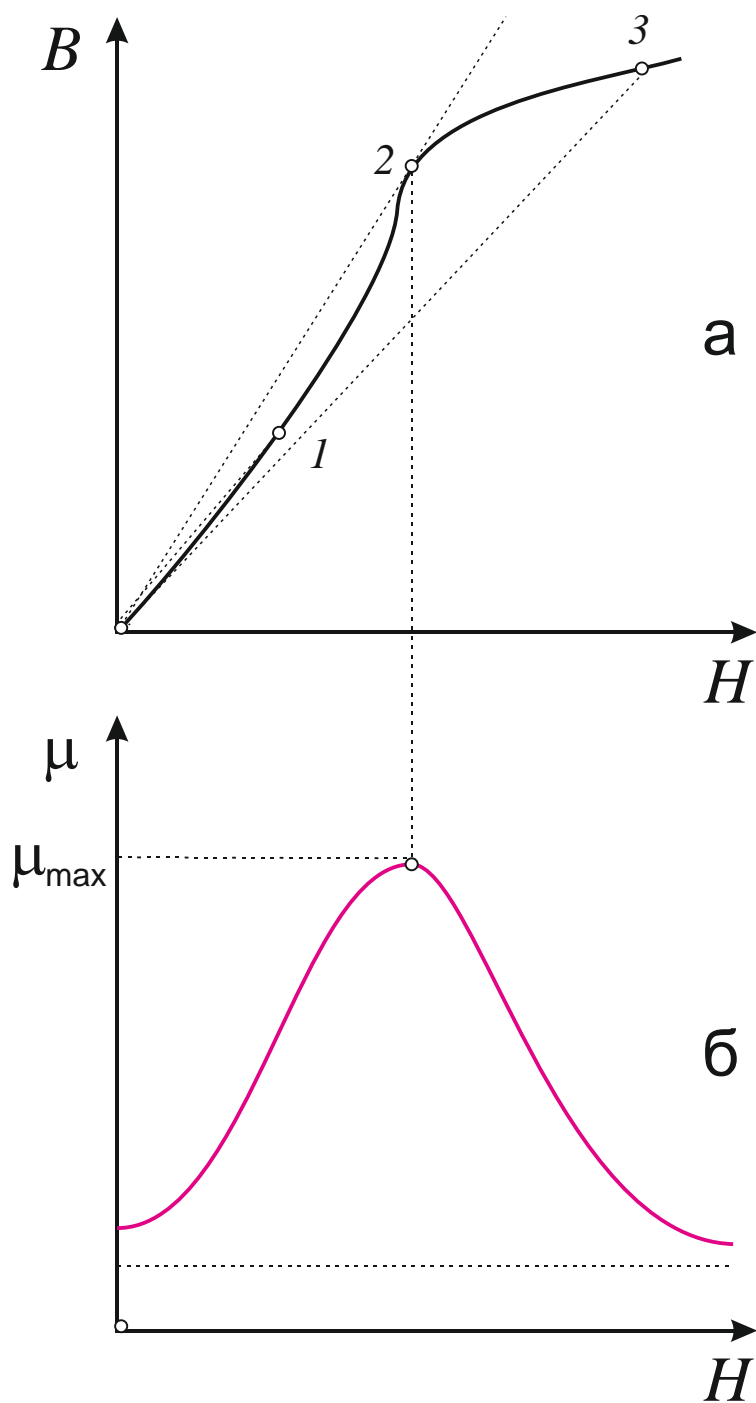
Петля гистерезиса для ферромагнетиков

Дальнейшее увеличение напряжённости магнитного поля в противоположном исходному направлению называется перемагничиванием. Процесс перемагничивания идёт по кривой 2-3 и в точке 3 магнитная индукция в ферромагнетике приобретает нулевое значение. Напряжённость магнитного поля в точке 3 называется *коэрциальной силой*  $H_c$  – это та напряжённость магнитного поля, которую надо приложить в противоположном направлении, чтобы размагнитить ферромагнетик.

После этого процесс полностью повторяется в обратном направлении: ферромагнетик намагничивается по кривой 3-4, размагничивается до остаточно намагниченности по кривой 4-5 и до нуля при наложении поля с напряжённостью  $H_c$  в точке 6. после чего снова намагничивается по кривой 4-1. Заметьте, кривая 4-1 не совпадает с кривой 0-1, но при достижении значения напряжённости, при котором мы прекратили намагничивание исходно не намагниченного ферромагнетика (*точка 1, кривая 0-1*) обе кривые пересекаются.

Эта кривая называется *петлей гистерезиса*. Площадь этой петли равна работе на перемагничивание ферромагнетика. Пунктиром на рисунке указана петля гистерезиса в случае, если бы мы прекратили намагничивание раньше и повторили бы эксперимент.

Рассмотрим также отдельно зависимость магнитной индукции в ферромагнетике от напряжённости магнитного поля – Рисунок 2.4 а. Проведём касательные из начала координат к произвольной точке (*точки 1, 2, 3*). Поначалу угол наклона этой касательной растёт с увеличением напряжённости. Но в точке 2 он достигает максимума и дальше начинает уменьшаться. Точка 2 соответствует максимуму магнитной проницаемости для данного вещества ( $\mu_{max}$ ). Это вполне соответствует наличию у ферромагнетиков максимальной намагниченности  $J_{нас}$ .



**Рисунок 2.4**

Магнитная индукция и магнитная проницаемость в зависимости от напряжённости магнитного поля в ферромагнетиках

Выразим из уравнений (2.7) и (2.8) значение магнитной проницаемости

$\mu$ :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{J} = \chi \bar{H} \Rightarrow \frac{J}{H} \\ \mu = 1 + \chi \end{array} \right\} \Rightarrow \mu = 1 + \frac{J}{H}.$$

На начальном этапе магнитная проницаемость будет расти вместе с ростом намагниченности. Но достигнув значения насыщения для намагниченности, магнитная проницаемость начёт падать:

$$\mu = 1 + \frac{J_{нас}}{H}.$$

Отметим ещё одно свойство ферромагнетиков – они теряют свои ферромагнитные свойства и превращаются в парамагнетики при достижении термодинамической температуры значения точки Кюри  $T_C$ . Далее зависимость магнитной восприимчивости ферромагнетиков описывается формулой, аналогичной формуле, описывающей подобную зависимость для парамагнетиков – (2.13):

$$\chi_M = \frac{C}{T - T_C} \quad (2.14)$$

Существуют также и антиферромагнетики, спины которых ориентируются антипараллельно по парам, и их магнитная восприимчивость очень близка к 0. Для них также существует антиферромагнитная точка Кюри (*точка Нееля*).

## 2.6. Магнитное поле на границе двух магнетиков

Выясним, как ведёт себя магнитное поле на границе раздела двух магнетиков. Для этого вспомним уравнение для циркуляции для вектора напряжённости магнитного поля (закон полного тока) и теорему Гуса для вектора магнитной индукции (формулы (1.23), (1.22), (1.21), (1.20)):

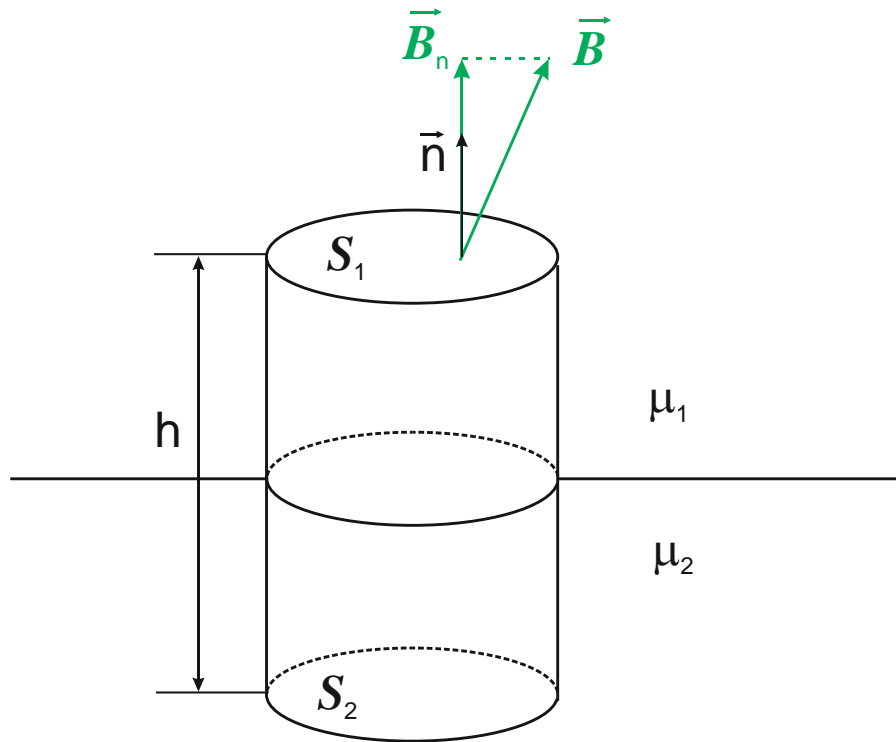
$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} \Leftrightarrow \oint_{l_1} \bar{H} \cdot d\bar{l} = I$$

Сначала рассмотрим теорему Гаусса для вектора магнитной индукции. В качестве замкнутой поверхности возьмём цилиндр с торцевыми сторонами, перпендикулярными границе раздела диэлектриков. И рассматривать теорему будем для составляющей вектора магнитной индукции, перпендикулярной поверхности раздела диэлектриков и, следовательно, торцевым поверхностям цилиндра. В этом случае поток через боковые поверхности цилиндра будет отсутствовать. Да и высоту цилиндра можно сделать бесконечно маленькой. Поток же через торцевые поверхности будет равен произведению вектора магнитной индукции  $B$  на площадь соответствующей поверхности (*площади обоих торцов равны*):

$$S_1 = S_2 = S.$$





**Рисунок 2.5**

Теорема Гаусса для магнитной индукции на границе двух магнетиков

В итоге получим:

$$\oiint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_{1n}S - B_{2n}S + \underbrace{\langle B_n \rangle S_{\text{бок.}}}_0 = 0,$$

$$B_{1n}S - B_{2n}S = 0,$$

$$B_{1n} \cancel{S} = B_{2n} \cancel{S}.$$

Нормальные составляющие вектора магнитной индукции в обоих диэлектриках будут равны:

$$B_{1n} = B_{2n} = B_n. \quad (2.15)$$

Теперь перейдём от индукции к напряжённости магнитного поля:

$$B = \mu\mu_0 H,$$

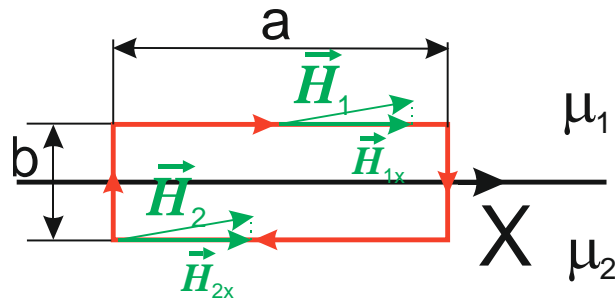
$$\mu_1 \cancel{\mu_0} H = \mu_2 \cancel{\mu_0} H,$$

$$\mu_1 H = \mu_2 H.$$

Отношение нормальных составляющих напряжённостей магнитного поля в двух диэлектриках будет равно отношению их магнитных проницаемостей:

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (2.16)$$

А теперь рассмотрим циркуляцию, причём рассмотрим её для тангенциальной составляющей вектора напряжённости магнитного поля – для составляющей вектора  $\vec{H}$ , параллельной границе раздела:



**Рисунок 2.6**

Циркуляция вектора напряжённости магнитного поля на границе двух магнетиков

Для неё можно записать:

$$\oint_{l_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1\tau} \cdot a - H_{2\tau} \cdot a + \underbrace{\langle H_b \rangle \cdot 2b}_0 = I.$$

При этом мы учли, что стороны  $b$  можно сделать бесконечно маленькой и поток через неё будет равен нулю.

Выбранный нами контур не охватывает ни одного тока. Следовательно и циркуляция должна равняться  $0$ :

$$I = 0 \Rightarrow H_{1\tau} \cdot a - H_{2\tau} \cdot a = 0.$$

В результате получили равенство тангенциальных составляющих для векторов напряжённости магнитного поля в двух диэлектриках:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (2.17)$$

Перейдём от напряжённости к индукции:

$$H = \frac{1}{\mu\mu_0} B,$$

$$\frac{1}{\mu\mu_0} B_{1\tau} = \frac{1}{\mu\mu_0} B_{2\tau},$$

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}.$$

Для тангенциальных составляющих векторов магнитной индукции будем иметь утверждение – их отношение будет равно отношению магнитных проницаемостей двух диэлектриков:

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (2.18)$$

Под конец рассчитаем отношение тангенсов угла наклона векторов магнитной индукции в двух средах (отношение тангенсов угла наклона к нормали к поверхности):

$$tg\alpha = \frac{B_{\tau}}{B_n},$$

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\frac{B_{\tau 1}/B_{n1}}{B_{\tau 2}/B_{n2}}}{\frac{D_{\tau 1}/B_{n1}}{D_{\tau 2}/B_{n2}}} = \frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Отношение тангенсов угла наклона к нормали к поверхности для векторов магнитной индукции двух сред равно отношению магнитных проницаемостей этих сред:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (2.19)$$

**Таблица 2.2**

Электрическое и магнитное поле на границе раздела фаз

	Электрическое поле	Магнитное поле
Нормальная составляющая	$D_{1n} = D_{2n}$ $\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$B_{1n} = B_{2n}$ $\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$
Тангенциальная составляющая	$E_{1\tau} = E_{2\tau}$ $\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$H_{1\tau} = H_{2\tau}$ $\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

### 3. Явления электромагнитной индукции

#### 3.1. Работа в магнитном поле

(работа силы Ампера)

Рассмотрим рамку с током в магнитном поле.

Пусть одна из её сторон, а конкретней  $AB$ , способна перемещаться по направляющим проводникам. Пусть вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости рамки. Тогда на эту сторону (на этот проводник) действует сила Ампера, заставляющая её перемещаться и производя, таким образом, работу:

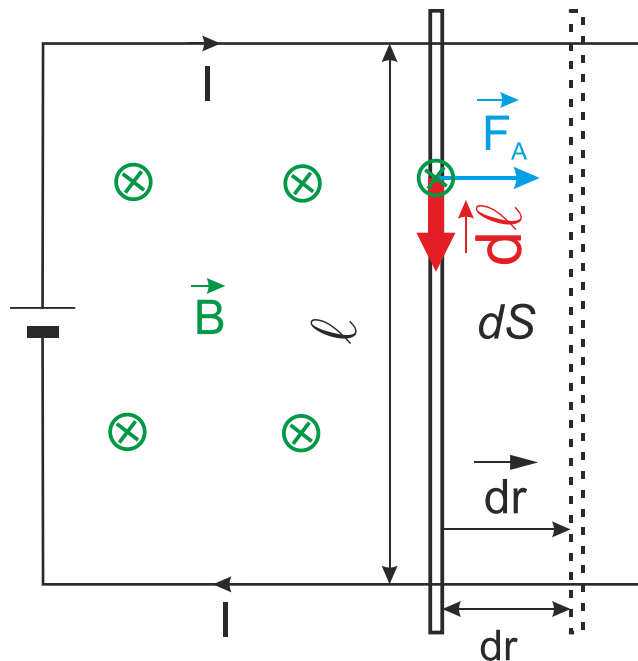


Рисунок 3.1

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$f = \frac{F}{l} = IB \Rightarrow F_A = IBl$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_A \cdot d\vec{r} = IB \underbrace{ldr}_{dS} = IBdS$$

Здесь мы учли, что сила Ампера параллельна перемещению:

$$\vec{F} \parallel d\vec{r} \Rightarrow \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = 1,$$

и ввели элементарную величину  $dS$  на которую изменилась площадь рамки:

$dS$  – элементарное изменение площади рамки.

Учитывая определение элементарного потока вектора магнитной индукции:

$$d\Phi_B = BdS$$

(В данном случае  $\bar{B} \uparrow \uparrow d\bar{S}$ , поэтому  $\bar{B} \cdot d\bar{S} = B dS$ )

Получим:

$$dA = I \underbrace{B dS}_{\Phi_B} = I d\Phi_B,$$
$$dA = I d\Phi_B.$$

В общем случае, при постоянном значении магнитной индукции:

$$B = const \Rightarrow \Phi_B = BS \cos(\bar{B}, \bar{n}).$$

Здесь:

$$\Phi_B - \text{магнитный поток. Измеряется в веберах, } [B\phi] = [B][c] = \frac{[кг][м]^2}{[с]^2 [А]}.$$

Международное обозначение [Wb].

В общем случае этот косинус компенсирует косинус в скалярном произведении элементарной работы:

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F dr \cos(\bar{B}, \bar{n}).$$

**Общий вид выражения для магнитного потока:**  
интегральный

$$\Phi_B = \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S}, \quad (3.1)$$

дифференциальный

$$d\Phi_B = \bar{B} \cdot d\bar{S}, \quad (3.2)$$

или

$$d\Phi_B = \bar{B} \cdot \bar{n} dS.$$

Можно доказать, что данное выражение будет справедливо и в случае произвольной формы рамки и произвольного направления вектора  $\mathbf{B}$  относительно плоскости рамки:

$$dA = I d\Phi_B. \quad (3.3)$$

Проинтегрировав выражение, получаем интегральную форму выражения для работы:

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 I d\Phi = I \int_1^2 d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi,$$

$$A = I\Delta\Phi_B. \quad (3.4)$$

**Замечание:** сила Ампера складывается из сил Лоренца, действующих на отдельные носители заряда, т.е. на электроны. Но работа силы Лоренца равна нулю. Т.о., сама сила Ампера не совершает работы. Работа совершается за счет ЭДС источника питания поддерживающего постоянную силу тока.

## 3.2. Электромагнитная индукция

### 3.2.1. Закон электромагнитной индукции Фарадея

Фарадеем был открыт следующий закон. При изменении магнитного потока, пронизывающего контур с проводником, в контуре возникает ЭДС индукции и начинает течь ток.

Магнитный поток ( $Df$ , напоминание – следует из определения потока):

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} . \quad (3.5)$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi_B}{dt} . \quad (3.6)$$

ЭДС индукции пропорционально скорости изменения магнитного потока. Знак минус обозначает тот факт, что изменение магнитного потока приводит к возникновению ЭДС индукции, которая создаёт в контуре проводника ток, пытающийся компенсировать изменение магнитного потока (его магнитное поле пытается компенсировать изменение исходного магнитного поля). В этом состоит суть утверждения правила Ленца для электромагнитной индукции.

Более точно. *Правило Ленца*: направление индукционного тока в замкнутом контуре всегда такое, что созданное им магнитное поле противодействует изменению магнитного поля, которое вызывает этот индукционный ток.

**Замечание 1.** Это экспериментальный закон.

**Замечание 2.** Способы изменения магнитного потока:

$$\Phi_B = BS \cos \alpha \Rightarrow d\Phi_B = S \cos \alpha dB + B \cos \alpha dS + BS (-\sin \alpha) d\alpha$$

1. Абсолютное значение  $B$  – изменение магнитного поля по абсолютной величине.
2. Изменение площади контура, охватывающего магнитный поток (к примеру, движение проводника по направляющим, как в опыте с «работой в магнитном поле», см. ниже связь закона Фарадея с работой в магнитном поле).
3. Изменение угла между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$  – к примеру, вращение контура с проводником, как в генераторе на электростанции.

**Связь закона Фарадея с работой магнитного поля (работой сил в электромагнитном поле).**

Вспомним определение ЭДС:

$$\varepsilon = \frac{A^*}{q} ,$$

и перепишем его для элементарной работы по перемещению элементарного заряда:

$$\varepsilon = \frac{dA^*}{dq}.$$

Подставим это выражение в закон электромагнитной индукции Фарадея и выразим из него элементарную работу, не забыв при этом определение силы тока, как производной заряда по времени  $\left( I = \frac{dq}{dt} \right)$ :

$$\frac{dA^*}{dq} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow dA^* = - \frac{dq}{dt} d\Phi_B = -I d\Phi_B.$$

Получили выражение, которое отличается от выражение для работы по перемещению проводника в магнитном поле только знаком *минус*. Это и понятно, так как там речь идёт о «*работе системы*», а здесь о «*работе внешних сил над системой*».

$$dA^* = -I d\Phi_B. \quad (3.7)$$

### 3.2.2. Самоиндукция. Индуктивность

Если, как было сказано раньше, изменение магнитного потока вызывает ЭДС в контуре, который пронизывает этот магнитный поток, то *это* изменение *магнитного потока* должно вызывать ЭДС и в самом контуре, создавший этот магнитный поток. Это следует из того, что созданный контуром магнитный поток, в любом случае, будет пронизывать контур, его создавший. Причём, ток, созданный этим ЭДС, будет создавать магнитный поток, который будет пытаться компенсировать изменение исходного магнитного потока, породившего эту ЭДС. Это ЭДС называется ЭДС индукции –  $\mathcal{E}_i$ .

Можно сказать, что данный закон является проявление принципа *Ле Шателье*, широко известного в термодинамике. Однако следует отметить, что принципа *Ле Шателье* как раз и написан, глядя на закон электромагнитной индукции и самоиндукцию.

Теперь введём понятие индуктивности.

**Индуктивность, определение:**

**Df 1:** Индуктивностью называется коэффициент пропорциональности между магнитным потоком (*или полным магнитным потоком*) и силой тока.

$$L : \Phi_B = L \cdot I. \quad (3.8)$$

Измеряется в *генри*,  $[H] = \frac{[B][c]}{[A]} = \frac{[кг][м]^2}{[с]^2[A]}$ . Международное обозначение  $[H]$ .

Поясним, почему эти величины, действительно пропорциональны:

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \int \bar{B} \cdot d\bar{S} \Rightarrow \Phi_B \sim \bar{B} \\ \bar{B} &= \int d\bar{B} \Rightarrow \Phi_B \sim \bar{B} \sim d\bar{B} \\ d\bar{B} &= \frac{4\pi}{\mu\mu_0} \frac{I d\bar{l} \times \bar{r}}{r^3} \Rightarrow \Phi_B \sim \bar{B} \sim d\bar{B} \sim I.\end{aligned}$$

Индуктивность есть коэффициент пропорциональности между магнитным потоком и силой тока (для одного витка). При рассмотрении нескольких витков вводят понятие полного магнитного потока (или потокосцепления).

**Df 2:** Полным магнитным потоком (или потокосцеплением) называется суммарный магнитный поток (сумма магнитных потоков), пронизывающий все проводники.

При этом не важно, что эти потоки образованы, по сути, одними и теми же силовыми линиями. Пояснение этому утверждению дадим чуть ниже.

**Df 3:** Индуктивность есть коэффициент пропорциональности между полным магнитным потоком (или потокосцеплением) и силой тока (для  $N$  витков);

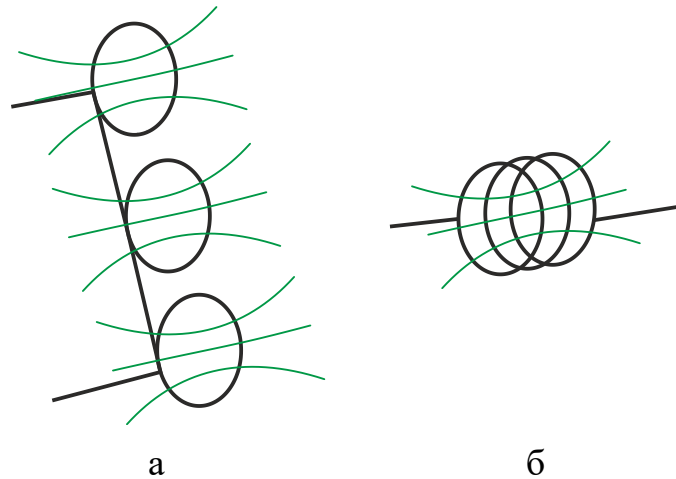
$$\Psi_B = N \cdot \Phi_B \Rightarrow L : \Psi_B = L \cdot I. \quad (3.9)$$

Полный магнитный поток (или потокосцепление) есть произведение магнитного потока на количество витков, которые он пронизывает (для  $N$  витков), так как в каждом из витков он создаёт отдельную ЭДС индукции. *Поясним.* Пусть одно и то же магнитное поле пронизывает несколько контуров, и в каждом из них возникает своё ЭДС. Мы можем рассчитать отдельно ЭДС, возникшие в каждом из контуров. Но можем и сложить (по принципу линейности) все потоки в один, и, если все эти контуры связаны в общую цепь, применить закон один раз к общему суммарному потоку:

$$\begin{aligned}\varepsilon_j &= -\frac{d\Phi_{Bj}}{dt} \Rightarrow \varepsilon = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j = \sum_{j=1}^N \left( -\frac{d\Phi_{Bj}}{dt} \right) = -\sum_{j=1}^N \frac{d\Phi_{Bj}}{dt} = \\ &= -\frac{\sum_{j=1}^N d\Phi_{Bj}}{dt} = -\frac{d\sum_{j=1}^N \Phi_{Bj}}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^N \Phi_{Bj}\end{aligned}$$

При этом не важно, расположены эти контуры в одной плоскости, разнесены в пространстве или пронизываются одним и тем же магнитным полем последовательно:





**Рисунок 3.2**  
Потокосцепление

Причём, следует учесть, что в случае (б) все витки пронизываются одним и тем же потоком!

Теперь рассмотрим *соленоид* – его витки (*контуры*) имеют одну и ту же площадь (*приблизительно*) и пронизываются, *практически*, одним и тем же потоком (*случай два*). В этом случае, суммарный магнитный поток, пронизывающий все эти контура (*все эти витки*), можно рассчитать, как магнитный поток, пронизывающий один контур, умноженный на количество витков:

$$\Psi_B = N \cdot \Phi_B$$

Теперь подставим выражение для магнитного потока в закон Фарадея и получим формулу для расчёта ЭДС самоиндукции:

Для не ферромагнетиков (*индуктивность не зависит от силы тока*)

$$L = \text{const}$$

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\frac{Ld(I)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Окончательно:

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}. \quad (3.10)$$

Для ферромагнетиков (*индуктивность зависит от силы тока*)

$$L \neq \text{const}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(\frac{L \cdot d(I)}{dt} + \frac{I \cdot d(L)}{dt}\right) = \\ &= -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right) = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dI} \cdot \frac{dI}{dt}\right) = -\left(L + I\frac{dL}{dI}\right)\frac{dI}{dt}. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\varepsilon_s = - \left( L + I \frac{dL}{dI} \right) \frac{dI}{dt} . \quad (3.11)$$

**Самоиндукция:**

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{без ферромагнитного сердечника}),$$

$$\varepsilon_s = - \left( L + I \frac{dL}{dI} \right) \frac{dI}{dt} \quad (\text{с ферромагнитным сердечником}).$$

### 3.2.3. Расчёт индуктивности соленоида

Рассмотрим выражение для магнитной индукции соленоида:

$$B = \mu\mu_0 n I$$

и подставим его в выражение для *полного магнитного потока (потокосцепления)*:

$$\Psi = N \Phi_B = \underbrace{nl}_N \underbrace{BS}_{\Phi_B} = nl \underbrace{\mu\mu_0 n I}_B S .$$

При этом, учитывая однородность магнитного поля внутри соленоида, магнитной поток вычислялся нами, как произведение площади витка на абсолютное значение магнитной индукции:

$$\Phi_B = \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S} = BS \quad (\bar{B} = const, \bar{B} \uparrow \uparrow \bar{n}) .$$

Здесь также нами было учтено, что количество витков  $N$  в формуле полного магнитного потока равно количеству витков на единицу длины соленоида  $n$ , умноженному на его длину  $\ell$ :

$$N = n \ell .$$

А теперь преобразуем выражение и заметим, что произведение длина соленоида на площадь сечения витка даст нам объём самого соленоида:

$$V = S \ell .$$

Тогда получим:

$$\Psi = nl \underbrace{\mu\mu_0 n I}_B S = \mu\mu_0 n^2 \underbrace{\ell S}_V I = \mu\mu_0 n^2 V I .$$

Учитывая определение индуктивности, как коэффициента пропорциональности потокосцеплением и силой тока, получаем:

$$\Psi = LI \Rightarrow L = \mu\mu_0 n^2 V ,$$

$$\Psi = \underbrace{\mu\mu_0 n^2 V}_L I .$$

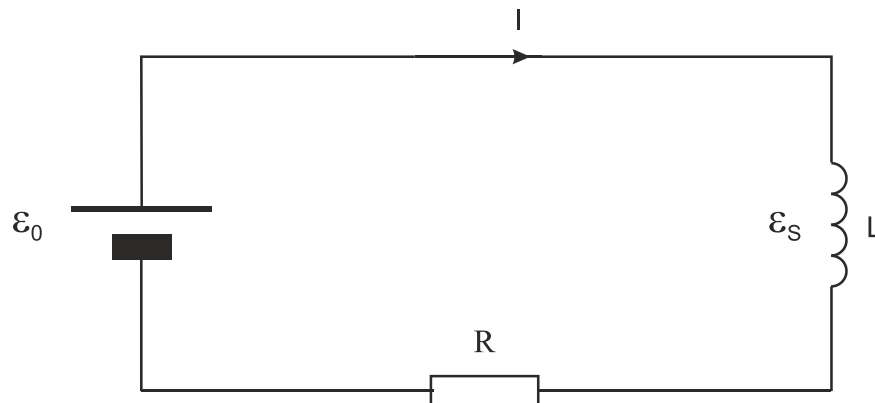
Получили формулу для индуктивности соленоида:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V . \quad (3.12)$$

### 3.3. Энергия и плотность энергии магнитного поля

#### 3.3.1. Энергия магнитного поля

Рассмотрим электрическую схему, состоящую из источника питания, сопротивления и индуктивности (скажем, соленоида с индуктивностью  $L$ ):



**Рисунок 3.3**

Энергия магнитного поля

Запишем закон Ома для полной (замкнутой) цепи:

$$RI = \varepsilon ,$$

учитывая при этом, что общая ЭДС будет складываться из ЭДС источника питания и ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_s .$$

Тогда уравнение примет вид:

$$RI = \varepsilon_0 + \varepsilon_s ,$$

$$\varepsilon_0 = RI - \varepsilon_s .$$

Теперь выразим величину элементарного заряда из определения силы тока, как произведение силы тока на элементарный промежуток времени и домножим наше уравнение справа и слева на эту величину:

$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = I dt ,$$

$$\varepsilon_0 = RI - \varepsilon_s \cdot dq = I dt .$$

Преобразуем выражение. В левой части заменим ЭДС источника, как работу сторонних сил по перемещению единичного заряда (только запишем

это, как отношение элементарного заряда к элементарному промежутку времени). В правой части обратим внимание, что первое слагаемое есть выражение для теплоты по закону Джоуля-Ленца, а во второе слагаемое подставим выражение для ЭДС индукции по закону Фарадея:

$$\underbrace{\varepsilon_0}_{\frac{dA^*}{dq}} \underbrace{I}_{\frac{dq}{dt}} dt = \underbrace{RI^2 dt}_{dQ=I^2 R dt} - \underbrace{\varepsilon_s}_{-\frac{d\Phi}{dt}} I dt .$$

Здесь мы учли следующие соотношения:

$$\varepsilon = \frac{dA^*}{dq} ,$$

$$I = \frac{dq}{dt} ,$$

$$Q = I^2 R t \Rightarrow dQ = I^2 R dt ,$$

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt} .$$

В итоге получим:

$$\frac{dA^*}{dq} \frac{dq}{dt} dt = dQ - \left( -\frac{d\Phi}{dt} \right) I dt ,$$

$$dA^* = dQ + Id\Phi .$$

Далее из определения индуктивности получим выражение элементарного магнитного потока, как произведение индуктивности на элементарную силу тока и подставим это в полученную формулу:

$$\Phi = LI \Rightarrow d\Phi = LdI ,$$

$$dA^* = dQ + I \underbrace{LdI}_{d\Phi} ,$$

$$dA^* = dQ + LI dI .$$

Внесём сначала силу тока (как переменную), а потом и индуктивность (как константу) под знак дифференциала:

$$dA^* = dQ + Ld\left(\frac{I^2}{2}\right) ,$$

$$dA^* = dQ + d\left(\frac{LI^2}{2}\right) .$$

Получили выражение, где в левой части стоит работа сторонних сил, создающая электрический ток. В правой части стоят величины,

определяющие, на что расходуется эта работа при протекании электрического тока. И так, первое слагаемое – элементарная теплота, выделяющаяся при прохождении электрического тока. Смысл второго слагаемого мы пока не знаем. Это слагаемое зависит от индуктивности  $L$  и силы тока  $I$  – в любом случае есть функция магнитного потока. Очевидно, это слагаемое определяет параметр, характеризующий именно магнитное поле. Это второе слагаемое и есть *энергия магнитного поля*:

$$dA^* = dQ + dW_B,$$

где *энергия магнитного поля проводника*:

$$W_B = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.13)$$

Для сравнения напомним выражение для энергии электрического поля проводника с током:

$$W_E = \frac{CU^2}{2}.$$

### 3.3.2. Плотность энергии магнитного поля

Рассмотрим соленоид:

$$\begin{aligned} B &= \mu\mu_0 nI, \\ \Psi = N\Phi &= \underbrace{nl}_N BS = nl \underbrace{\mu\mu_0 nI}_B S = \\ &= \mu\mu_0 n^2 \underbrace{lS}_V I = \mu\mu_0 n^2 VI, \\ \Psi &= LI \Rightarrow L = \mu\mu_0 n^2 V. \end{aligned}$$

Его энергия будет равна (*подставим в выражение для энергии магнитного поля соленоида выражение для его индуктивности, затем вынесем объём соленоида  $V$  за пределы выражения*):

$$W_B = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 VI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2}{2} V.$$

Выделим из выражения квадрат магнитной индукции соленоида:

$$W_B = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2}{2} V = \frac{\left( \overbrace{\mu\mu_0 nI}^B \right)^2}{2\mu\mu_0} V = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V.$$

Мы видим из полученного выражения, что энергия соленоида пропорциональна его объёму. Поскольку поле внутри соленоида однородно,

логично говорить о *плотности энергии магнитного поля* (внутри соленоида и вообще, как о физической величине):

$$w_B = \frac{W_B}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

Вспомнив формулу связи *напряжённости* и *индукции* магнитного поля:

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0},$$

получим три разных выражения *плотности энергии магнитного поля*:

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (3.14)$$

Отдельно предлагаем сравнить полученные выражения с формулами для плотности энергии электрического поля:

$$w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

### 3.4. Уравнения Максвелла

#### 3.4.1. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла

Рассмотрим закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi_B}{dt},$$

и подставим в него определение магнитного потока, как интеграла по поверхности от вектора магнитной индукции

$$\Phi_B = \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S}.$$

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S}}{dt}$$

Поменяем местами дифференцирование и интегрирование

$$\varepsilon_i = - \frac{d \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S}}{dt} = - \int_{S_1} \frac{d\bar{B}}{dt} \cdot d\bar{S},$$

а ЭДС в левой части заменим по определению, как работу по перемещению единичного заряда, вспомнив при этом определение работы из механики (интеграл по длине кривой от скалярного произведения силы на элементарное перемещение):

$$A = \int_{l_1} dA = \int_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{A^*}{q} \\ A &= \int_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\int_{l_1} \vec{F}^* \cdot d\vec{l}}{q} = \int_{l_1} \frac{\vec{F}^*}{q} \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = \int_{l_1} \frac{\vec{F}^*}{q} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{E}^* \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = \int_{l_1} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} .$$

Поскольку речь идёт об ЭДС, возникающем в замкнутом контуре, охватывающем площадь, пронизанную магнитным потоком, перейдём к интегралу по замкнутому контуру:

$$\varepsilon = \oint_{l_1} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} .$$

Подставим всё это в исходное уравнение:

$$\oint_{l_1} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = - \int_{S_1} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} .$$

Теперь опустим звёздочку у вектора напряженности поля сторонних сил. Эти сторонние силы есть силы *электрического*, но не *статического*, а *индукционного поля*. И, хотя они и не являются электростатическими, но тоже имеют электрическую (*точнее, электромагнитную*) природу. Теперь мы не будем различать электрические статические и индукционные силы.

Получили *первое уравнение системы уравнений Максвелла в интегральной форме*:

$$\oint_{l_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{S_1} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} . \quad (3.15)$$

Используя теорему Стокса, перейдём к дифференциальной форме:

$$\oint_{l_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} ,$$

$$\int_{S_1} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} .$$

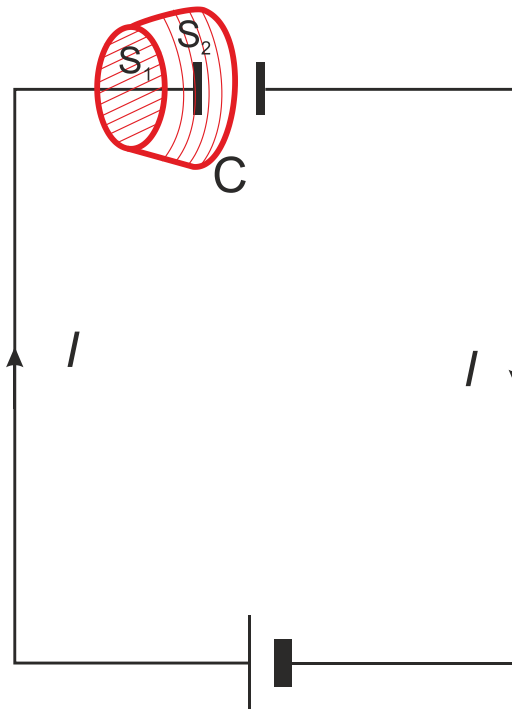
Поскольку равенство интегралов не зависит от выбранной поверхности, равны подынтегральные выражения.

Получили *первое уравнение системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме*:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \quad (3.16)$$

### 3.4.2. Ток смещения. Третье уравнение Максвелла

Рассмотрим процесс зарядки конденсатора:



**Рисунок 3.4**

Поток тока смещения

Возьмём уравнение для циркуляции магнитного поля по контуру, охватывающему проводник в непосредственной близости от конденсатора. Запишем его для двух поверхностей – одна «натянута» на контур и пересекает проводник, другая «как мешок» охватывает обкладку конденсатора.

$$\oint_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^N I_i .$$



$$\oint_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu\mu_0 I \neq 0$$

– через первую поверхность протекает ток, и циркуляция не равна нулю.

$$\oint_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

– через вторую ток не течёт, и циркуляция по тому же контуру равна нулю.

Получили противоречие – по одному и тому же контуру с одной точки зрения должно циркулировать магнитное поле, с другой точки зрения – нет. Максвелл предположил, что между обкладками конденсатора тоже, течёт электрический ток, но *другой ток*. Он назвал этот ток **током смещения**. На самом деле речь идёт о **явлении электромагнитной индукции** и **электромагнитной волне**, но выкладки остаются до конца и полностью верными.

Введём понятие тока и плотности тока смещения:

$$I_{см.} = \int_{S_2} \vec{j}_{см.} \cdot d\vec{S}$$

Для получения выражения для плотности тока смещения запишем теорему Гаусса для вектора *электрического смещения*:

$$\oint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

Продифференцируем правую и левую части по времени:

$$\oint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \left| \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t}$$

Внесём производную под интеграл:

$$\oint_{S_1} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t}$$

Теперь запишем уравнение непрерывности для плотности тока (*поток плотности тока через замкнутую поверхность равен убыли заряда внутри этой поверхности – из замкнутого пространства может вытекать ровно столько заряда, на сколько его там уменьшилось*) и приравняем скорости изменения заряда (*производные заряда по времени*).

$$\left. \begin{aligned} \oint_{S_1} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{S} &= \frac{\partial q}{\partial t} \\ \oint_{S_1} \bar{j} \cdot d\bar{S} &= -\frac{\partial q}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \oint_{S_1} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{S} = -\oint_{S_1} \bar{j} \cdot d\bar{S} .$$

Теперь преобразуем выражение – перенесём всё в правую часть, внесём под общий интеграл:

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{S} + \oint_{S_1} \bar{j} \cdot d\bar{S} &= 0 \\ \oint_{S_1} \left( \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j} \right) \cdot d\bar{S} &= 0 \end{aligned}$$

Будем, как и в случае стационарного течения тока (без наличия конденсатора, с учётом закона сохранения заряда – сколько втекло, столько и вытекло) считать, что поток через замкнутую поверхность равен нулю, а под интегралом стоит сумма втекающего тока и вытекающего тока смещения (или наоборот):

$$\oint_{S_1} \left( \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{S} = 0 .$$

В итоге приходим к выражению для плотности тока смещения, как скорости изменения вектора электрического смещения:

$$\begin{aligned} \bar{j}_{\text{полн.}} &= \bar{j} + \bar{j}_{\text{см.}} \\ \bar{j}_{\text{см.}} &= \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} . \end{aligned}$$

Запишем теперь выражение для плотности полного тока и подставим его в формулу для циркуляции вместо обычной плотности тока, стоявшей там ранее:

$$\begin{aligned} \bar{j}_{\text{полн.}} &= \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \oint_{l_1} \bar{B} \cdot d\bar{l} &= \mu\mu_0 \int_{S_1} \bar{j} \cdot d\bar{S} \rightarrow \oint_{l_1} \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu\mu_0 \int_{S_1} \bar{j}_{\text{полн.}} \cdot d\bar{S} . \end{aligned}$$

Так же и в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \bar{B} = \mu\mu_0 \bar{j} \rightarrow \text{rot } \bar{B} = \mu\mu_0 \bar{j}_{\text{полн.}} .$$

В итоге имеем третье уравнение системы уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме:

$$\oint_{l_1} \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu\mu_0 \int_{S_1} \left( \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{S}, \quad (3.17)$$

$$\text{rot } \bar{B} = \mu\mu_0 \left( \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right). \quad (3.18)$$

### 3.4.3. Система уравнений Максвелла и её физический смысл

Сначала приведём три дополнительных уравнения (связь дополнительных, основных и вспомогательных величин):

– связь вектора электрического смещения и напряжённости электрического поля

$$\bar{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \bar{E},$$

– связь индукция и напряжённости магнитного поля

$$\bar{B} = \mu\mu_0 \bar{H},$$

– закон Ома (в дифференциальной форме, с ввязь плотности тока и напряжённости электрического поля)

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}.$$

Интегральная форма уравнений (первые скобки содержат номер уравнения в системе уравнений Максвелла)

$$\oint_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_{S_1} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S} \quad (1) - (3.19)$$

$$\oint_{S_1} \bar{D} \cdot d\bar{S} = \int_{V_1} \rho dV \quad (2) - (3.20)$$

$$\oint_{l_1} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_{S_1} \left( \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{S} \quad (3) - (3.21)$$

$$\oint_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (4) - (3.22)$$

Дифференциальная форма уравнений

$$\text{rot } \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (1') - (3.23)$$

$$\text{div } \bar{D} = \rho \quad (2') - (3.24)$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (3') - (3.25)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \quad (4') - (3.26)$$

По физическому смыслу уравнения (3.19), (3.23) и (3.21), (3.25) характеризуют вихревые свойства электрической и магнитной составляющей электромагнитного поля. И та и другая определяются скоростью изменения второй компоненты – вихревой характер электрического поля определяется скоростью изменения магнитного поля, вихревой характер магнитного – скоростью изменения электрического. Однако для магнитного поля присутствует и ещё один источник его вихревой составляющей – электрический ток.

Уравнения (3.20), (3.24) и (3.21), (3.25) характеризуют потенциальную составляющую электрического и магнитного полей. Для электрической компоненты она определяется плотностью заряда, для магнитной отсутствует (*в следствии отсутствия или необнаруженности на практике магнитных зарядов*).

**В отсутствии заряда**

$$\oint_{S_1} \bar{D} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (2) - (3.27)$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = 0 \quad (2') - (3.28)$$

В отсутствии зарядов потенциальная составляющая для электрического поля будет отсутствовать так же, как и для магнитного.

**В отсутствии тока**

$$\oint_{l_1} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_{S_1} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{S} \quad (3) - (3.29)$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (3') - (3.30)$$

В отсутствии тока вихревая составляющая магнитного поля, как электрического будет определяться лишь скоростью изменения второй компоненты – в данном случае, электрического поля.

**Для случая стационарных полей**

$$\oint_{l_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \quad (1) - (3.31)$$

$$\oint_{l_1} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_{S_1} \bar{j} \cdot d\bar{S} \quad (3) - (3.32)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0 \quad (1') - (3.33)$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} \quad (3') - (3.34)$$

В стационарном случае из уравнений исчезнут производные по времени. Из всех вихревых составляющих останется только вихревая составляющая магнитного поля, определяемая протекающими электрическими токами.

## 4. Релятивистское представление электромагнитного поля<sup>2</sup>

### 4.1. Векторный потенциал магнитного поля

В этом разделе нам снова понадобятся дифференциальные операторы. Но изображать мы их будем исключительно с помощью оператора «набла» –  $\nabla$ .

**Напомним:**

$$\begin{aligned}\nabla \varphi &= \text{grad } \varphi, \\ \nabla \cdot \bar{A} &= \text{div } \bar{A}, \\ \nabla \times \bar{A} &= \text{rot } \bar{A}.\end{aligned}$$

Сделаем небольшой экскурс в *математическую теорию поля* – раздел *математического анализа* высшей математики. Все приведённые здесь утверждения мы будем давать без доказательства, их доказательства можно найти в соответствующей главе учебника *высшей математики*. Для векторных полей можно ввести следующую классификацию:

**Потенциальные поля** (эквивалентные утверждения):

- $\exists \varphi : \bar{A} = \nabla \varphi$  – для данного поля существует потенциал;
- $\forall A, B, \forall C_1, C_2 : \int_{AC_1B} \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_{AC_2B} \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_A^B \bar{A} \cdot d\bar{r}$  – криволинейный интеграл не зависит от кривой (*работа не зависит от траектории*);
- $\oint \bar{A} \cdot d\bar{l} = 0$  – контурный интеграл (*интеграл по замкнутой кривой*) равен нулю (*работа по замкнутому контуру равна нулю, циркуляция равна нулю*);
- $\text{rot } \bar{A} = 0$  – ротор равен нулю.

**Соленоидальные поля** (эквивалентные утверждения):

- $\nabla \cdot \bar{B} = 0$  – дивергенция поля равна нулю (*оно не имеет источников*);
- $\exists \bar{A} : \bar{B} = \nabla \times \bar{A}$  – для такого поля можно ввести понятие *векторного потенциала*.

**Утверждение:**

- Любое векторное поле может быть представлено, как сумма потенциального и соленоидального полей.

---

<sup>2</sup> Материал этого раздела является дополнительным и не включён в вопросы коллоквиума и экзамена даже для моих студентов. Однако на обозначения, утверждения и выводы данного раздела имеются многочисленные ссылки при изложении квантовой механики («Импульс фотона», «Уравнение Клейна-Гордина-Фока», «Уравнение Дирака» и т.д.).

### Электростатическое поле:

- $\bar{E} = -\nabla\varphi$  – это потенциальное поле;
- $\nabla \cdot \bar{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$  – его дивергенция пропорциональна плотности заряда.

Электростатическое поле является потенциальным. Это вполне очевидно – в самом начале его изучения мы сказали (*и доказали*), что электростатическое поле консервативно. А это практически эквивалентные утверждения. Просто одно формулируется на языке физики, а другое на языке математики

Что же касается магнитного поля, то *она не консервативно!* И это тоже было сказано в ходе изложения. Это чисто *вихревое поле* и для него отсутствуют заряды. Так вот, *оно соленоидально*.

### Магнитное поле:

- $\nabla \times \bar{B} = \frac{1}{\mu_0} \bar{j}$ ,  $\left[ \nabla \times \bar{B} = \frac{1}{\mu_0} \left( \bar{j} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) \right]$  – его ротор пропорционален плотности тока (*закон полного тока*), а в общем случае плотности тока и скорости изменения электрического поля;
- $\text{div } \bar{B} = 0 \Rightarrow \exists \bar{A} : \bar{B} = \text{rot } \bar{A}$  – это соленоидальное поле и для него можно ввести понятие векторного потенциала.

Поскольку магнитное поле является чисто соленоидальным, для него можно ввести понятие векторного потенциала.  $\bar{A}$  – *векторный потенциал* магнитного поля.

Теперь введём понятие калибровки для обоих потенциалов. Это понятие будет очень важно в квантовой механике и, практически, даст жизнь современному представлению об элементарных частицах.

### Условия калибровки:

Напомним потенциал, как и потенциальная энергия, заданы с точностью до аддитивной постоянной:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E} = -\nabla\varphi \\ \varphi' = \varphi + C \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{E} = -\nabla\varphi',$$

так как:

$$\nabla\varphi' = \nabla(\varphi + C) = \nabla\varphi + \underbrace{\nabla C}_{\nabla C} = \nabla\varphi.$$

– к потенциалу (*или потенциальной энергии*) мы всегда можем прибавить некоторую константу и ни одна физическая реальность при этом не изменится. Это соответствует возможности произвольно выбрать начало отсчёта для потенциальной энергии (*дно потенциальной ямы*) и, в отличие от

кинетической энергии, как бы мы не задали это начало отсчёта, противоречия со здравым смыслом не будет.

Так вот, векторный потенциал задан с точностью до *градиента произвольной функции*:

$$\left. \begin{aligned} \bar{B} &= \nabla \times \bar{A} \\ \bar{A}' &= \bar{A} + \nabla \psi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{B} = \nabla \times \bar{A}' ,$$

так как:

$$\nabla \times \bar{A}' = \nabla \times (\bar{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \bar{A} + \underbrace{\nabla \times (\nabla \psi)}_0 = \nabla \times \bar{A} .$$

Добавление произвольной постоянной к электрическому потенциалу и произвольного градиента скалярной функции к векторному потенциалу называется *выбором калибровки для потенциала*.

По существу, пока мы считаем, что потенциал есть лишь *математический аппарат*, позволяющий более эффективно и просто работать с *векторными полями*, заменяя их на более простые – *скалярные поля*. Таким образом, *выбор калибровки* – лишь наш *способ решения* тех или иных *математических задач*. Экспериментально *выбор калибровки ни как не может быть проверен*, так как реально наблюдаемыми являются сами векторные поля – напряжённость электрического и индукция магнитного полей. Однако, как мы увидим в квантовой механике, на самом деле это не так. Существуют эффекты (*эффект Аронова – Бома*), позволяющие проверить отличие калибровок совершенно одинаковых векторных полей. Но об этом мы поговорим в разделе *квантовая теория поля*.

Теперь попытаемся *описать электромагнитное поле на языке* этих двух *потенциалов*. Сначала вспомним *1-е уравнение* системы уравнений Максвелла, а затем перепишем его на новом языке.

*Электрическое поле*:

- $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$  – его вихревая составляющая равна с обратным знаком скорости изменения магнитного поля (*ротор равен скорости изменения магнитной индукции*);
- $\bar{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$  – его можно представить, как сумму градиента потенциала (*потенциальная часть*) и скорости изменения векторного потенциала (*соленоидальная часть*).

Поясним последнее:

$$\nabla \times \bar{E} = \nabla \times \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = - \left( \underbrace{\nabla \times (\nabla \varphi)}_0 + \nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) =$$



$$= -\nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \underbrace{\nabla \times \bar{A}}_{\bar{B}} \right) = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} .$$

Ещё одно понятие, которое стоит ввести – *электро-кинетический импульс*. Задумаемся – магнитное поле действует на заряженную частицу с силой Лоренца. Сила Лоренца – гироскопическая сила, она не совершает работы и не изменяет энергию частицы. Но эта сила вызывает изменение импульса частицы, поэтому мы можем связать её с некоторым собственным импульсом.

**Электро-кинетический импульс.** Рассмотрим силу, действующую на заряд в электромагнитном поле:

$$\bar{F} = q\bar{E} = q \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = -\nabla (q\varphi) - \frac{\partial (q\bar{A})}{\partial t} + F_{\text{не электростат.}},$$

и подставим её во II закон Ньютона:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\bar{p}}{dt} = -\nabla (q\varphi) - \frac{\partial (q\bar{A})}{\partial t} + F_{\text{не электростат.}}$$

В отсутствии электрической составляющей (и других *потенциальных полей неэлектрической природы*) изменение импульса будет описываться магнитной составляющей:

$$\nabla \varphi = 0, \bar{F}_{\text{не электростат.}} = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{d(q\bar{A})}{dt} .$$

Мы видим, что величина  $q\bar{A}$  ведёт себя, как импульс. Её называют *электрокинетическим импульсом*:

$$\bar{p}_{\text{эл.к.}} = q\bar{A} .$$

Теперь сделаем следующие преобразования – перенесём все слагаемые в левую часть и внесём под один знак дифференциала (внесём под одну производную):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{d(q\bar{A})}{dt} &= \bar{F}_{\text{не электростат.}} \\ \frac{d(\bar{p} + q\bar{A})}{dt} &= \bar{F}_{\text{не электростат.}} \\ \frac{d(\bar{p} + q\bar{A})}{dt} &= -\text{grad } U_{\text{не электростат.}} \end{aligned}$$

Вспомнив, что из канонических уравнений (*уравнений Гамильтона*) следует следующее утверждение:

$$\frac{d\bar{p}_{\text{канонический}}}{dt} = -\text{grad } U$$

введём новое определение для канонического импульса:

$$\bar{P}_{\text{канонический}} = \bar{P}_{\text{механический}} + \bar{P}_{\text{электрокинетический}} = m\bar{v} + q\bar{A}$$

– канонический импульс;

$$\bar{P}_{\text{механический}} = m\bar{v}$$

– механический импульс;

$$\bar{P}_{\text{электрокинетический}} = q\bar{A}$$

– электрокинетический импульс.

На следующем шаге рассмотрим гамильтониан частицы. Напомним, под классическим гамильтонианом понимается полная энергия частицы (или механической системы), выраженная через потенциальную энергию и импульс. Пусть сначала на частицу не действуют никаких сил. Тогда:

$$H = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{m} \cdot \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Это есть выражение для гамильтониана свободной частицы. Теперь предположим, что частица находится в электростатическом поле с потенциалом  $\varphi$  и, возможно, на неё действуют ещё какие-либо потенциальные силы с потенциальной энергией  $A$ . Тогда к полной энергии надо добавить ещё и величину потенциальной энергии электростатического поля и потенциальную энергию полей неэлектростатической природы:

$$H = \frac{p^2}{2m} + q\varphi + A$$

Но на это выражение можно взглянуть ещё и по-другому. В отсутствие потенциальных полей и, вообще, какого-либо взаимодействия кинетическая энергия  $T$  равна полной энергии системы  $H$ :

$$T = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow T = H$$

При наличии же электростатического поля или ещё каких-либо потенциальных полей для того, чтобы приравнять кинетическую энергию полной, последнюю надо скорректировать на сумму всех потенциальных энергий (вычесть из полной энергии потенциальную):

$$T = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow T = H - (q\varphi + A)$$

Ну и последнее. Пусть помимо электрического, на частицу действует ещё и магнитное поле. В роли импульса у нас выступает уже новая величина.

Поэтому для сохранения связи импульса с кинетической энергией, его надо скорректировать на величину  $q\bar{A}$  (вычесть эту величину из импульса):

$$T = \frac{(\bar{p}_{\text{канонич.}} - q\bar{A})^2}{2m} \Rightarrow T = H - (q\varphi + U_{\text{не электростат.}}),$$

$$H = \frac{(\bar{p}_{\text{канонич.}} - q\bar{A})^2}{2m} + q\varphi + U_{\text{не электростат.}}$$

На самом деле данное выражение для гамильтониана нельзя получить методом прямого математического вывода. Оно следует из эксперимента и верно потому, что правильно описывает этот эксперимент. *Запомним это выражение!* Оно понадобится нам в квантовой механике!

## 4.2. 4-вектор электрического потенциала

Покажем, что потенциал вместе с вектор-потенциалом образуют 4-вектор в пространстве Минковского СТО. Для этого вспомним исходное уравнение для инварианта пространства Минковского –  $m_0^2 c^2$ , из которого был выведен 4-вектор импульса и преобразуем его к случаю наличия электромагнитного поля:

- Исходное уравнение (инвариант, квадрат 4-импульса, см. СТО):

$$m^2 c^2 - p^2 = m_0^2 c^2,$$

$$\frac{1}{c^2} \underbrace{m^2 c^4}_{E^2} - p^2 = \frac{1}{c^2} \underbrace{m_0^2 c^4}_{E_0^2},$$

$$\frac{1}{c^2} E^2 - p^2 = \frac{1}{c^2} E_0^2.$$

- Теперь введём поправку на потенциальную энергию и импульс электромагнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{полн.}} &= T + U_{\text{эл.-магн.}} \\ U_{\text{эл.-магн.}} &= q\varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = T + q\varphi,$$

$$\bar{p}_{\text{полн.}} = m\bar{v} - \bar{p}_{\text{эл.к.}} = \bar{p} - q\bar{A}.$$

Подставим в уравнение (3) и получим:

$$(\bar{p} - q\bar{A})^2 + \frac{1}{c^2} E_0^2 = \frac{1}{c^2} (E + q\varphi)^2,$$

$$\frac{1}{c^2} (E + q\varphi)^2 - (\bar{p} - q\bar{A})^2 = \frac{1}{c^2} E_0^2,$$

$$\left(\frac{1}{c}E + q\frac{1}{c}\varphi\right)^2 - (\bar{p} - q\bar{A})^2 = \left(\frac{1}{c}E_0\right)^2 \quad (4.1)$$

Поскольку

$$\left(\frac{1}{c}E\right)^2 - (\bar{p})^2$$

– псевдоскалярный квадрат (длина) 4-вектора:

$$p^\mu = \left(\frac{1}{c}E, \bar{p}\right) = \left(\frac{1}{c}E, p_x, p_y, p_z\right) = (p_0, p_1, p_2, p_3),$$

то:

$$\left(q\frac{1}{c}\varphi\right)^2 - (q\bar{A})^2 = q\left(\left(\frac{1}{c}\varphi\right)^2 - (\bar{A})^2\right)$$

– так же псевдоскалярный квадрат (длина) 4-вектора (который мы умножили на скалярную величину – заряд  $q$ ):

$$A_\mu = \left(\frac{1}{c}\varphi, \bar{A}\right) = \left(\frac{1}{c}\varphi, A_1, A_2, A_3\right) = (A_0, A_1, A_2, A_3)$$

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\varphi, -\bar{A}\right) = \left(\frac{1}{c}\varphi, -A_1, -A_2, A_3\right) = (A_0, -A_1, -A_2, -A_3)$$

Величина  $A_\mu$  – 4-вектор электрического потенциала или электромагнитный потенциал.

Для 4-мерного случая пространства Минковского (СТО) для квадрата 4-импульса в ковариантной форме тоже необходимо внести изменения. Из выражения (4.1), переходя к координатному представлению, получаем:

$$\left(\frac{1}{c}E + q\frac{1}{c}\varphi\right)^2 - (p_x - qA_x)^2 - (p_y - qA_y)^2 - (p_z - qA_z)^2 = \left(\frac{1}{c}E_0\right)^2$$

$$(p_0 + qA_0)^2 - (p_1 + qA_1)^2 - (p_2 + qA_2)^2 - (p_3 + qA_3)^2 = m_0^2 c^2$$

$$(p_\mu + qA_\mu)(p^\mu + qA^\mu) = m_0^2 c^2$$

В итоге, имеем следующую замену для инварианта длины вектора 4-импульса в присутствии электромагнитного поля для пространства Минковского СТО:

$$p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2 \quad \rightarrow \quad (p_\mu + qA_\mu)(p^\mu + qA^\mu) = m_0^2 c^2$$

И это выражение ещё понадобится нам в кантовой механике.

### 4.3. Тензор электромагнитного поля и уравнения Максвелла в тензорном виде

**Тензор электромагнитного поля.** Покажем, что все компоненты электромагнитного поля (все проекции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ) можно получить, как компоненты следующим образом определённой тензорной величины:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Здесь

$\partial_\mu A_\nu$  – ковариантная производная, понятие которой мы вводили в рамках ковариантного представления СТО.

Покажем, чему же будут равны компоненты этого тензора (этой матрицы) с различными индексами

- Все диагональные компоненты – то есть те, у которых оба индекса равны, будут равны 0:

$$F_{00} = \frac{\partial A_0}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^0} = 0,$$

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0.$$

- Все компоненты, у которых один из индексов 0, будут представлять компоненты вектора напряженности электрического поля – вектора  $\vec{E}$ :

$$F_{01} = \left( -\frac{\partial A_x}{\partial t} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \underbrace{-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}}_{E_x} = E_x,$$

$$F_{10} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left( -\frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = - \left( \underbrace{-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}}_{E_x} \right) = -E_x,$$

$$F_{02} = -F_{20} = E_y,$$

$$F_{03} = -F_{30} = E_z.$$

- Все оставшиеся компоненты будут компоненты вектора индукции магнитного поля – вектора  $\vec{B}$ :

$$F_{13} = -F_{31} = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y,$$

$$F_{12} = -F_{21} = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = B_z,$$

$$F_{32} = -F_{23} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x.$$

В результате мы получили следующую матрицу (*антисимметричный тензор третьего ранга*)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

**Уравнения Максвелла.** Используя вновь введённое представление, можно несколько по другому записать *систему уравнений Максвелла*. Мы приведём её чисто в справочном виде, чтобы подчеркнуть краткость данной формы представления. При этом мы не будем пояснять значения новых для нас математических операций.

Сначала введём понятие *4-вектора тока* или **4-тока**:

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) = (c\rho, j_x, j_y, j_z).$$

Здесь

$\rho$  – плотность электрического заряда,

$\vec{j}$  – вектор плотности тока.

Тогда уравнения Максвелла можно записать в одном из следующих видов:

$$\begin{cases} dF = 0 \\ \partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \end{cases}$$

здесь:

$dF$  – внешний дифференциал (*внешняя дифференциальная форма*);

либо:

$$\begin{cases} \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \\ \partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \end{cases}$$

здесь:

$\tilde{F}$  – дуальный тензор.

Мы не будем пояснять смысл вновь введённых здесь понятий (*внешний дифференциал, дуальный тензор*), поскольку приводим эту информацию чисто в иллюстративных целях.

## Литература

### Основная литература

1.
  - a. [Савельев И.В. Курс общей физики. В 5-ти т. Том 2. Электричество и магнетизм — М,СПб: Лань, 2011.](#)
  - b. [Савельев И.В. Курс общей физики. В 3-х т. Том 2. Электричество и магнетизм, волны, оптика — М,СПб: Лань, ~2011](#)
2. [Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. — М, СПб: Физматлит, Невский диалект, 2014.](#)

### Дополнительная литература

3. [Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие в 5-и томах. Т. 3. Электромагнетизм. — М: ..., 2014.](#)
4. [Савельев И.В. Основы теоретической физики. В 2-х т. Том 1. Механика и электродинамика — М: «Наука», 1991.](#)
5. [Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. — М: «Высшая школа», 1990.](#)
6. [Измайлов С.В. Курс электродинамики. — М: «Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР», 1962](#)



## Осташев Владимир Борисович

Учёная степень: кандидат технических наук

Учёное звание: доцент

Должность: доцент кафедры общей физики СПбГТИ(ТУ)

*Личный сайт:*

<http://ostashevvb.spb.ru>



*Вкладки:*

«*В помощь детям*» – конспекты лекций, методические материалы,  
вопросы к экзамену

«*О себе*» – контактная информация

[Вернуться к содержанию...](#)

Кафедра общей физики  
Электромагнетизм II–  
Конспект лекций

*Владимир Борисович Осташев*

---

Отпечатано с оригинал-макета Формат 60×90  $\frac{1}{16}$

Печатных листов \_\_,\_\_ Тираж \_\_ экз.

---

Государственное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
Санкт-Петербургский государственный технологический институт  
(технический университет)  
**(СПбГТИ (ТУ))**

---

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26  
Отпечатано в типографии \_\_\_\_\_, т. +7- \_\_\_\_\_

цена 0 руб. 00 коп.